

1. Soit a , b et c trois réels quelconques.

Développer $(a+b)^2$ et $(a+b+c)^2$.

2. Soit a_1, a_2, \dots, a_n n réels quelconques.

Conjecturer la forme développée générale de $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$.

Démontrer la conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Analyse

Un résultat classique qu'il est bon de connaître et qui se retient... plutôt facilement !

Résolution

Question 1.

On a immédiatement : $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Puis, par exemple :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= ((a+b)+c)^2 \\ &= (a+b)^2 + c^2 + 2(a+b)c \\ &= a^2 + b^2 + 2ab + c^2 + 2ac + 2bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

Question 2.

Dans les deux cas précédents, on remarque que l'on obtient la somme des carrés des termes de la somme apparaissant initialement entre parenthèses et celle de tous les doubles produits possibles.

On peut ainsi conjecturer que pour tout n -uplet (a_1, a_2, \dots, a_n) de réels et tout entier naturel n supérieur ou égal à deux, on a :

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \dots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \end{aligned}$$

Montrons ce résultat par récurrence.

Posons :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n &: \text{« pour tout } n\text{-uplet } (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ de réels} \\ (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \dots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n \text{ »} \end{aligned}$$

Initialisation

D'après la première question, \mathcal{P}_2 est vraie.

Hérédité

Soit n un entier naturel quelconque fixé supérieur ou égal à 2.

On suppose que \mathcal{P}_n est vraie.

On a donc, pour tout n -uplet (a_1, a_2, \dots, a_n) de réels :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \dots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n$$

On veut montrer que \mathcal{P}_{n+1} est vraie, soit :

pour tout n -uplet $(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$ de réels

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2 \\ &\quad + 2a_1a_2 + \dots + 2a_1a_n + 2a_1a_{n+1} + 2a_2a_3 + \dots + 2a_n a_{n+1} \end{aligned}$$

Soit alors $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ $n+1$ réels. On a :

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 &= ((a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1})^2 \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + a_{n+1}^2 + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)a_{n+1} \end{aligned}$$

Soit, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + a_{n+1}^2 + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)a_{n+1} \\ &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \dots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n \\ &\quad + a_{n+1}^2 + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)a_{n+1} \\ &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2 + 2a_1a_2 + \dots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n \\ &\quad + 2a_1a_{n+1} + 2a_2a_{n+1} + 2a_n a_{n+1} \\ &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2 \\ &\quad + 2a_1a_2 + \dots + 2a_1a_n + 2a_1a_{n+1} + 2a_2a_3 + \dots + 2a_n a_{n+1}\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion

La propriété est initialisée pour $n = 2$ et héréditaire. On en déduit qu'elle est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Pour tout n -uplet (a_1, a_2, \dots, a_n) de réels

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \dots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n$$

Remarque : la propriété est en fait vraie pour tout n -uplet de nombres complexes.