Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes de limites l et l' respectivement.

Etudier la suite (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \min(u_n, v_n)$.

Analyse

On peut procéder de diverses façons… Un simple dessin peut aider à se faire une idée (en particulier lorsque les limites des suites (u_n) et (v_n) sont distinctes…) mais on peut aussi se souvenir d'une « formule » donnant le minimum de deux réels !

Résolution

1ère approche

On a classiquement : $w_n = \dfrac{u_n + v_n - |u_n - v_n|}{2}$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = l + l'$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = l - l'$, $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n - v_n| = |l - l'|$ (car la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ et donc en $l - l'$) et enfin :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n + v_n - |u_n - v_n|}{2} = \frac{l + l' - |l - l'|}{2} = \min(l, l')$$

2ème approche

Supposons, dans un premier temps, $l \neq l'$. On peut par exemple poser : $l < l'$.

On va ici utiliser le fait qu'à partir d'un rang N suffisamment grand, les u_n seront suffisamment proches de l et les v_n suffisamment proches de l' pour que l'on ait $\min(u_n, v_n) = u_n$.

Choisissons un ε strictement inférieur à $l' - l$, par exemple $\varepsilon = \dfrac{l' - l}{2}$.

Il existe un entier naturel N tel que : $n \geq N \Rightarrow u_n \in \left]l - \varepsilon \,;\, l + \varepsilon\right[$. Il existe également un entier naturel N' tel que : $n \geq N' \Rightarrow v_n \in \left]l' - \varepsilon \,;\, l' + \varepsilon\right[$. Alors, pour $N'' = \max(N, N')$ on a :

$$n \geq N'' \Rightarrow u_n \in \left]l - \varepsilon \,;\, l + \varepsilon\right[\text{ et } v_n \in \left]l' - \varepsilon \,;\, l' + \varepsilon\right[$$

Comme $\varepsilon = \frac{l'-l}{2}$, il vient facilement : $l + \varepsilon < l + \frac{l'-l}{2} = \frac{l'+l}{2} = l' - \frac{l'-l}{2} < l' - \varepsilon$.
Ainsi, pour $n \geq N''$, on a : $\min(u_n, v_n) = u_n$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
On a donc, les suites (u_n) et (v_n) jouant des rôles symétriques : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \min(l, l')$.

Supposons maintenant $l = l'$.
Pour tout $\varepsilon > 0$:

- Il existe un entier naturel N tel que : $n \geq N \Rightarrow u_n \in \left]l - \varepsilon \,;\, l + \varepsilon\right[$.
- Il existe un entier naturel N' tel que : $n \geq N' \Rightarrow v_n \in \left]l - \varepsilon \,;\, l + \varepsilon\right[$.

Alors : $n \geq \max(N, N') \Rightarrow \min(u_n, v_n) \in \left]l - \varepsilon \,;\, l + \varepsilon\right[$ et on conclut immédiatement :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = l = \min(l, l')$$

On retrouve le résultat obtenu précédemment.