On rappelle que l'on a $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$ où γ est la constante d'Euler.

Soit k un entier naturel non nul.
Etudier la nature de la suite $\left(w_n^{(k)}\right)$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\; w_n^{(k)}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{kn}-\frac{1}{kn+1}-\frac{1}{kn+2}-\ldots-\frac{1}{n^2}$$

Analyse

On s'efforce bien sûr d'utiliser le résultat classique fourni en début d'énoncé…

Résolution

Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\begin{aligned}
w_n^{(k)} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{kn}-\frac{1}{kn+1}-\frac{1}{kn+1}-\ldots-\frac{1}{n^2}\\
&= 2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{kn}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{kn}+\frac{1}{kn+1}+\frac{1}{kn+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)\\
&= 2\left(\ln(kn)+\gamma+\mathrm{o}(1)\right)-\left(\ln\left(n^2\right)+\gamma+\mathrm{o}(1)\right)\\
&= 2\ln(k)\cancel{+2\ln(n)}+2\gamma\cancel{-2\ln(n)}-\gamma+\mathrm{o}(1)\\
&= 2\ln(k)+\gamma+\mathrm{o}(1)
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que la suite $\left(w_n^{(k)}\right)$ converge et admet pour limite $2\ln(k)+\gamma$.

Résultat

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\; \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{kn}-\frac{1}{kn+1}-\frac{1}{kn+1}-\ldots-\frac{1}{n^2}\right)=2\ln(k)+\gamma$$