Donner une condition nécessaire et suffisante pour que :

1. Le produit de deux matrices symétriques soit une matrice symétrique.
2. Le produit de deux matrices antisymétriques soit une matrice antisymétrique.

Analyse

Un exercice très simple d'application directe de la notion de transposition.

Résolution

Soit A et B deux matrices symétriques. On a donc ${}^{t}A = A$ et ${}^{t}B = B$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
AB \text{ symétrique } &\Leftrightarrow {}^{t}(AB) = AB \\
&\Leftrightarrow {}^{t}B\,{}^{t}A = AB \\
&\Leftrightarrow BA = AB \\
&\Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ commutent}
\end{aligned}$$

Soit A et B deux matrices antisymétriques. On a donc : ${}^{t}A = -A$ et ${}^{t}B = -B$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
AB \text{ symétrique } &\Leftrightarrow {}^{t}(AB) = -AB \\
&\Leftrightarrow {}^{t}B\,{}^{t}A = -AB \\
&\Leftrightarrow (-B)(-A) = -AB \\
&\Leftrightarrow BA = -AB \\
&\Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ anticommutent}
\end{aligned}$$

Résultat final

Le produit de deux matrices symétriques (respectivement antisymétriques) est une matrice symétrique (respectivement antisymétrique) si, et seulement si, ces deux matrices commutent (respectivement anticommutent).