Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que A et B commutent si, et seulement si, pour tout scalaire α, les matrices $\mathrm{A}-\alpha\mathrm{I}$ et $\mathrm{B}-\alpha\mathrm{I}$ commutent.

Analyse

On procède directement par équivalence.

Résolution

On a facilement :

$$(\mathrm{A}-\alpha\mathrm{I})(\mathrm{B}-\alpha\mathrm{I})=\mathrm{AB}-\alpha\mathrm{A}-\alpha\mathrm{B}+\alpha^2\mathrm{I}$$

Et :

$$(\mathrm{B}-\alpha\mathrm{I})(\mathrm{A}-\alpha\mathrm{I})=\mathrm{BA}-\alpha\mathrm{B}-\alpha\mathrm{A}+\alpha^2\mathrm{I}$$

Il vient donc :

$$\begin{gathered}\forall\alpha\in\mathbb{K},\ \mathrm{A}-\alpha\mathrm{I}\text{ et }\mathrm{A}-\alpha\mathrm{I}\text{ commutent}\\ \Leftrightarrow\forall\alpha\in\mathbb{K},\ (\mathrm{A}-\alpha\mathrm{I})(\mathrm{B}-\alpha\mathrm{I})=(\mathrm{B}-\alpha\mathrm{I})(\mathrm{A}-\alpha\mathrm{I})\\ \Leftrightarrow\forall\alpha\in\mathbb{K},\ \mathrm{AB}-\alpha\mathrm{A}-\alpha\mathrm{B}+\alpha^2\mathrm{I}=\mathrm{BA}-\alpha\mathrm{B}-\alpha\mathrm{A}+\alpha^2\mathrm{I}\\ \Leftrightarrow\mathrm{AB}=\mathrm{BA}\\ \Leftrightarrow\mathrm{A}\text{ et }\mathrm{B}\text{ commutent}\end{gathered}$$

Résultat final

Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\forall\alpha\in\mathbb{K},\ \mathrm{A}-\alpha\mathrm{I}\text{ et }\mathrm{A}-\alpha\mathrm{I}\text{ commutent}\Leftrightarrow\mathrm{A}\text{ et }\mathrm{B}\text{ commutent}$$