

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe deux matrices B et C de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$A = B + C$$

Analyse

Penser à la diagonale ... ou à la matrice nulle !

Résolution

En pensant à la matrice nulle O_n , on a facilement : $O_n = I_n + (-I_n)$.

Plus généralement, on doit se rappeler qu'une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, ses éléments diagonaux sont non nuls. Or, il n'est pas difficile d'écrire une matrice comme somme de deux matrices triangulaires, l'une inférieure et l'autre supérieure. On se concentre donc sur la diagonale de A :

- Si $a_{ii} = 0$, on choisit par exemple $b_{ii} = -1$ et $c_{ii} = 1$.
- Si $a_{ii} \neq 0$, on choisit par exemple : $b_{ii} = c_{ii} = \frac{a_{ii}}{2}$.

Pour $i \neq j$, on définit alors les éléments des matrices B et C comme suit :

- Si $i < j$ (éléments situés au-dessus de la diagonale principale), $b_{ij} = 0$ et $c_{ij} = a_{ij}$.
- Si $i > j$ (éléments situés en-dessous de la diagonale principale), $b_{ij} = a_{ij}$ et $c_{ij} = 0$.

Ainsi, les matrices B et C sont triangulaires respectivement inférieures et supérieures d'éléments diagonaux non nuls. Elles sont bien inversibles et, par construction, on a bien $A = B + C$.

Par exemple, avec : $A = \begin{pmatrix} 4,8 & 25 & 4 & 2,8 \\ \pi & 0 & 1 & -6 \\ -1 & 11 & -14 & -\pi^2 \\ 0 & 41 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 4,8 & 25 & 4 & 2,8 \\ \pi & 0 & 1 & -6 \\ -1 & 11 & -14 & -\pi^2 \\ 0 & 41 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2,4 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 11 & -7 & 0 \\ 0 & 41 & 3 & 3 \end{pmatrix}}_B + \underbrace{\begin{pmatrix} 2,4 & 25 & 4 & 2,8 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -7 & -\pi^2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_C$$

Résultat final

Toute matrice carrée est somme de deux matrices inversibles.