

Soit A une matrice carrée d'ordre n antisymétrique.

1. Montrer que la matrice $I+A$ est inversible (on raisonnera par l'absurde en supposant l'existence d'une matrice colonne X non nulle telle que $AX = -X$ et on calculera ${}^t(AX)(AX)$).
2. Soit $B = (I-A)(I+A)^{-1}$. Montrer que : ${}^tB = B^{-1}$.

Analyse

Dans les deux questions, la solution est essentiellement donnée via des calculs matriciels mettant en œuvre les propriétés relatives aux matrices inverses et transposées.

Résolution

Question 1.

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On suppose que l'on a : $X \neq 0$ et $AX = -X$.

On a alors : ${}^t(AX)(AX) = {}^t(-X)(-X) = {}^tXX = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ (puisque au moins un des x_i est, par hypothèse, non nul).

Comme A est antisymétrique, on a ${}^tA = -A$ puis :

$${}^t(AX)(AX) = ({}^tX{}^tA)(AX) = ({}^tXA)(-X) = {}^tX(AX) = {}^tX(-X) = -{}^tXX = -\sum_{i=1}^n x_i^2 < 0$$

On aboutit ainsi à une contradiction.

Une telle matrice colonne X non nulle vérifiant $AX = -X$ n'existe donc pas (0 n'est pas valeur propre de la matrice $I+A$). La matrice $I+A$ est donc inversible.

La matrice $I+A$ est inversible.

Question 2.

Notons d'abord que A étant antisymétrique, il en va de même pour $-A$. D'après la question précédente, la matrice $I - A$ est donc inversible.

On a donc :

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \left[(I - A)(I + A)^{-1} \right]^{-1} \\ &= \left[(I + A)^{-1} \right]^{-1} (I - A)^{-1} \\ &= (I + A)(I - A)^{-1} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} {}^t B &= {}^t \left[(I - A)(I + A)^{-1} \right] \\ &= {}^t \left[(I + A)^{-1} \right] \times {}^t (I - A) \\ &= \left[{}^t (I + A) \right]^{-1} ({}^t I - {}^t A) \\ &= ({}^t I + {}^t A)^{-1} (I + A) \\ &= (I - A)^{-1} (I + A) \end{aligned}$$

Puisque les matrices $I + A$ et $I - A$ commutent et sont inversibles, on sait (cf. l'exercice rappelant ce résultat général) que les matrices $I + A$ et $(I - A)^{-1}$ commutent. On en déduit finalement : $B^{-1} = {}^t B$.

La matrice $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ vérifie : $B^{-1} = {}^t B$.