

Soit A et B deux matrices inversibles qui commutent.

Montrer que les matrices A et  $B^{-1}$  commutent.

---

## Analyse

Un résultat classique bien pratique pour certaine situation. Pour pouvoir exploiter le fait que les matrices A et B commutent, on a intérêt à considérer le produit AB, celui-ci étant lui-même inversible ...

---

## Résolution

Puisque les matrices A et B sont inversibles et commutent, on a :

$$(AB)(AB)^{-1} = (BA)(AB)^{-1} = I$$

Soit :

$$\begin{aligned}(BA)(B^{-1}A^{-1}) &= I \\ \Leftrightarrow BAB^{-1}A^{-1} &= I \\ \Leftrightarrow AB^{-1}A^{-1} &= B^{-1} \\ \Leftrightarrow AB^{-1} &= B^{-1}A\end{aligned}$$

Les matrices A et  $B^{-1}$  commutent bien.

Les matrices A et B jouant des rôles symétriques, on peut également conclure que les matrices  $A^{-1}$  et B ainsi que les matrices  $A^{-1}$  et  $B^{-1}$  commutent.

---

## Résultat final

Si deux matrices A et B sont inversibles et commutent,  
alors les matrices A, B,  $A^{-1}$  et  $B^{-1}$  commutent deux à deux.