On considère les matrices A et B suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}5&6\\2&1\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}7&3\\1&5\end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices $C=2A+B$ et $D=-3A+2B$.
2. Vérifier que l'on a : $A\times B=B\times A$.
3. Calculer le produit $C\times D$:
   - En utilisant les résultats de la question 1.
   - En développant d'abord le produit $(2A+B)\times(-3A+2B)$.

Analyse

Un exercice de pratique de la multiplication matricielle avec deux matrices, A et B, qui commutent ($A\times B=B\times A$). Les matrices étant de faible dimension, on s'efforcera d'effectuer les produits à la main !

Résolution

Question 1.

On a : $2A=\begin{pmatrix}2\times5&2\times6\\2\times2&2\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&12\\4&2\end{pmatrix}$, d'où :

$$C=2A+B=\begin{pmatrix}10&12\\4&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&3\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+7&12+3\\4+1&2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&15\\5&7\end{pmatrix}.$$

On procède de façon similaire avec le deuxième calcul.

On a : $-3A=\begin{pmatrix}-3\times5&-3\times6\\-3\times2&-3\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15&-18\\-6&-3\end{pmatrix}$ et $2B=\begin{pmatrix}2\times7&2\times3\\2\times1&2\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&6\\2&10\end{pmatrix}$, d'où :

$$D=-3A+2B=\begin{pmatrix}-15&-18\\-6&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}14&6\\2&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15+14&-18+6\\-6+2&-3+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-12\\-4&7\end{pmatrix}$$

$$\boxed{C=2A+B=\begin{pmatrix}17&15\\5&7\end{pmatrix} \text{ et } D=-3A+2B=\begin{pmatrix}-1&-12\\-4&7\end{pmatrix}}$$

Question 2.

On a :

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix}7 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}}^{B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix}5 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix}}_{A} & \begin{pmatrix}5\times7+6\times1 & 5\times3+6\times5\\ 2\times7+1\times1 & 2\times3+1\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41 & 45\\ 15 & 11\end{pmatrix}=A\times B\end{array}$$

et :

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix}5 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix}}^{A} \\ \underbrace{\begin{pmatrix}7 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}}_{B} & \begin{pmatrix}7\times5+3\times2 & 7\times6+3\times1\\ 1\times5+5\times2 & 1\times6+5\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41 & 45\\ 15 & 11\end{pmatrix}=B\times A\end{array}$$

On a bien :

$$\boxed{A\times B=B\times A}$$

Question 3.

En utilisant les résultats de la première question, on a :

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix}-1 & -12\\ -4 & 7\end{pmatrix}}^{D} \\ \underbrace{\begin{pmatrix}17 & 15\\ 5 & 7\end{pmatrix}}_{C} & \begin{pmatrix}17\times(-1)+15\times(-4) & 17\times(-12)+15\times7\\ 5\times(-1)+7\times(-4) & 5\times(-12)+7\times7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-77 & -99\\ -33 & -11\end{pmatrix}=C\times D\end{array}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}(2A+B)\times(-3A+2B)&=(2A)\times(-3A)+(2A)\times(2B)+B\times(-3A)+B\times(2B)\\&=-6A^2+4A\times B-3B\times A+2B^2\end{aligned}$$

Mais d'après la question 2, nous avons : $A\times B=B\times A$. Il vient donc :

$$\begin{aligned}(2A+B)\times(-3A+2B)&=-6A^2+4A\times B-3B\times A+2B^2\\&=-6A^2+4A\times B-3A\times B+2B^2\\&=-6A^2+A\times B+2B^2\end{aligned}$$

On calcule facilement : $A^2=\begin{pmatrix}37 & 36\\ 12 & 13\end{pmatrix}$ et $B^2=\begin{pmatrix}52 & 36\\ 12 & 28\end{pmatrix}$.

Alors :

$$\begin{aligned}(2A+B)\times(-3A+2B) &= -6A^2+A\times B+2B^2\\ &= -6\begin{pmatrix}37 & 36\\ 12 & 13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}41 & 45\\ 15 & 11\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}52 & 36\\ 12 & 28\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-222 & -216\\ -72 & -78\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}41 & 45\\ 15 & 11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}104 & 72\\ 24 & 56\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-222 & -216\\ -72 & -78\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}145 & 117\\ 39 & 67\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-77 & -99\\ -33 & -11\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On retrouve le résultat obtenu précédemment.

$$\boxed{C\times D=(2A+B)\times(-3A+2B)=\begin{pmatrix}-77 & -99\\ -33 & -11\end{pmatrix}=-11\begin{pmatrix}7 & 9\\ 3 & 1\end{pmatrix}}$$