1. Factoriser dans $\mathbb{R}$ le trinôme : $6x^2 - 25x + 24$.

Soit l'équation matricielle :

$$6X^2 - 25X + 24I_2 = O \qquad (E)$$

où X désigne une matrice carrée d'ordre 2 et I_2 la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Résoudre les équations matricielles :

$$2X - 3I_2 = O \text{ et } 3X - 8I_2 = O$$

3. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ est solution de l'équation (E).

4. Commenter.

Analyse

Une équation matricielle du second degré pour souligner, une fois encore, qu'avec les matrices, les choses diffèrent dès lors que le produit matriciel est en jeu …

Résolution

Question 1.

Le discriminant Δ associé au trinôme $6x^2 - 25x + 24$ vaut :

$$\Delta = (-25)^2 - 4 \times 6 \times 24 = 25^2 - 24^2 = (25-24)(25+24) = 49 = 7^2$$

On en tire immédiatement les deux valeurs qui annulent $6x^2 - 25x + 24$:

$$x_1 = \frac{25 - \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{25-7}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{25 + \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{25+7}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

D'où la factorisation demandée :

$$6x^2-25x+24=6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{8}{3}\right)=(2x-3)(3x-8)$$

Question 2.

On a :

$$\begin{aligned}&3\mathrm{X}-8\mathrm{I}_2=\mathrm{O}\\ &\Leftrightarrow 3\mathrm{X}=8\mathrm{I}_2\\ &\Leftrightarrow \mathrm{X}=\frac{8}{3}\mathrm{I}_2=\begin{pmatrix}\frac{8}{3} & 0\\ 0 & \frac{8}{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}&2\mathrm{X}-3\mathrm{I}_2=\mathrm{O}\\ &\Leftrightarrow 2\mathrm{X}=3\mathrm{I}_2\\ &\Leftrightarrow \mathrm{X}=\frac{3}{2}\mathrm{I}_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Les équations matricielles $3\mathrm{X}-8\mathrm{I}_2=\mathrm{O}$ et $2\mathrm{X}-3\mathrm{I}_2=\mathrm{O}$ admettent respectivement pour solutions les matrices :

$$\begin{pmatrix}\frac{8}{3} & 0\\ 0 & \frac{8}{3}\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Question 3.

Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{8}{3}\end{pmatrix}$.

On a facilement : $\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}\left(\frac{3}{2}\right)^2 & 0\\ 0 & \left(\frac{8}{3}\right)^2\end{pmatrix}$

Puis, en tenant compte du fait que $\frac{3}{2}$ et $\frac{8}{3}$ annulent $6x^2-25x+24$:

$$6A^2-25A+24I_2=6\begin{pmatrix}\left(\frac{3}{2}\right)^2 & 0\\ 0 & \left(\frac{8}{3}\right)^2\end{pmatrix}-25\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{8}{3}\end{pmatrix}+24\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-25\times\frac{3}{2}+24 & 0\\ 0 & 6\times\left(\frac{8}{3}\right)^2-25\times\frac{8}{3}+24\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

La matrice A est bien solution de l'équation (E).

Question 4.

La factorisation obtenue à la question 1 reste valable pour l'équation (E) :

$$6X^2-25X+24I_2=O$$
$$\Leftrightarrow 6\left(X-\frac{3}{2}I_2\right)\left(X-\frac{8}{3}I_2\right)=O$$
$$\Leftrightarrow (2X-3I_2)(3X-8I_2)=O$$

Dans $\mathbb{R}$, nous avons les équivalences :

$$6x^2-25x+24=0$$
$$\Leftrightarrow (2x-3)(3x-8)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x-3=0 \text{ ou } 3x-8=0$$

Les questions 2 et 3 nous montrent que les choses sont différentes avec les matrices !
Si les deux équations matricielles $3X-8I_2=O$ et $2X-3I_2=O$ nous donnent bien deux solutions de l'équation (E), il en existe d'autres ! C'est ce que permet d'affirmer le résultat obtenu à la question 3 puisque la matrice A n'est solution ni de $3X-8I_2=O$, ni de $2X-3I_2=O$. Ainsi, l'équivalence $6x^2-25x+24=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \text{ ou } 3x-8=0$ valable dans $\mathbb{R}$ ne l'est plus dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 (on pourrait généraliser aux autres ordres). Encore une manifestation de la différence profonde existant entre la multiplication des réels et celle des matrices.