

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$  où  $m$  est un réel.

A quelle condition sur le réel  $m$ , la matrice  $A$  est-elle inversible ?

## Analyse

On cherche classiquement une matrice  $B$  telle que  $A \times B = I_2$  et on obtient un système de quatre équations à quatre inconnues. Celui-ci n'admet une solution que sous une certaine condition sur  $m$  ...

## Résolution

On cherche à quelle condition sur le réel  $m$  il existe une matrice  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  telle que l'on

$$\text{ait : } A \times B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a facilement : } A \times B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+mc & b+md \\ 2a-5c & 2b-5d \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} A \times B = I_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+mc & b+md \\ 2a-5c & 2b-5d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a+mc=1 \\ 2a-5c=0 \\ b+md=0 \\ 2b-5d=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a+mc=1 \\ 2a-5c-2(a+mc)=0-2 \times 1 \\ b+md=0 \\ 2b-5d-2(b+md)=1-2 \times 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=1-mc \\ -(5+m)c=-2 \\ b=-md \\ -(5+m)d=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Les équations  $-(5+m)c = -2$  et  $-(5+m)d = 1$  n'admettent de solution que si l'on a  $5+m \neq 0$ , c'est-à-dire  $m \neq -5$ . En revanche, lorsque  $m = -5$ , ces équations n'admettent pas de solution et on ne peut trouver la matrice B. La matrice A n'est pas inversible.

---

## Résultat final

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$  où  $m$  est un réel, est inversible si, et seulement si,  $m \neq -5$ .