

Soit A et B les deux matrices de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A et B sont semblables (on cherchera P inversible telle que  $PB = AP$ ).

## Analyse

Pour simplifier les calculs, on pourra remarquer que l'on a :  $A = I_4 + A'$  et  $B = I_4 + B'$ .

## Résolution

En tenant compte de la remarque ci-dessus, on a :

$$PB = AP \Leftrightarrow P(I_4 + B') = (I_4 + A')P \Leftrightarrow P + PB' = P + A'P \Leftrightarrow PB' = A'P$$

On travaille donc avec :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posons :  $P = (p_{ij})$ .

On a :

$$PB' = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2p_{11} & 3p_{11} + 2p_{12} & 4p_{11} + 3p_{12} + 2p_{13} \\ 0 & 2p_{21} & 3p_{21} + 2p_{22} & 4p_{21} + 3p_{22} + 2p_{23} \\ 0 & 2p_{31} & 3p_{31} + 2p_{32} & 4p_{31} + 3p_{32} + 2p_{33} \\ 0 & 2p_{41} & 3p_{41} + 2p_{42} & 4p_{41} + 3p_{42} + 2p_{43} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs :

$$A'P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En exploitant la première colonne des deux matrices obtenues, il vient immédiatement :

$$p_{21} = p_{31} = p_{41} = 0$$

La dernière ligne donne alors :  $p_{41} = p_{42} = p_{43} = 0$ .

En tenant compte de ces premiers résultats, il vient :

$$PB' = A'P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2p_{11} & 3p_{11} + 2p_{12} & 4p_{11} + 3p_{12} + 2p_{13} \\ 0 & 0 & 2p_{22} & 3p_{22} + 2p_{23} \\ 0 & 0 & 2p_{32} & 3p_{32} + 2p_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit :  $p_{32} = 0$ . D'où :

$$PB' = A'P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2p_{11} & 3p_{11} + 2p_{12} & 4p_{11} + 3p_{12} + 2p_{13} \\ 0 & 0 & 2p_{22} & 3p_{22} + 2p_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 2p_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p_{11} = p_{22} \\ 2p_{22} = p_{33} \\ 2p_{33} = p_{44} \\ 3p_{11} + 2p_{12} = p_{23} \\ 4p_{11} + 3p_{12} + 2p_{13} = p_{24} \\ 3p_{22} + 2p_{23} = p_{34} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{22} = 2p_{11} \\ p_{33} = 4p_{11} \\ p_{44} = 8p_{11} \\ p_{23} = 3p_{11} + 2p_{12} \\ p_{24} = 4p_{11} + 3p_{12} + 2p_{13} \\ p_{34} = 3 \times 2p_{11} + 2 \times (3p_{11} + 2p_{12}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{22} = 2p_{11} \\ p_{33} = 4p_{11} \\ p_{44} = 8p_{11} \\ p_{23} = 3p_{11} + 2p_{12} \\ p_{24} = 4p_{11} + 3p_{12} + 2p_{13} \\ p_{34} = 12p_{11} + 4p_{12} \end{cases}$$

Ainsi, la matrice P est de la forme :

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2a & 3a + 2b & 4a + 3b + 2c \\ 0 & 0 & 4a & 12a + 4b \\ 0 & 0 & 0 & 8a \end{pmatrix}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure et elle est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont non nuls c'est-à-dire si, et seulement si :  $a \neq 0$ .

Finalement pour toute matrice P de cette forme avec  $a \neq 0$ , on aura  $PB = AP$ .

Les matrices A et B sont semblables.

Par exemple avec  $a = b = c = d = 1$ , on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } PB = AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 9 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Avec  $a = 1$  et  $b = c = d = 0$ , on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } PB = AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

---

## Résultat final

Les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.