

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que l'on a :

$$A \text{ antisymétrique} \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X.A.X = 0$$

---

## Analyse

On établit séparément chacune des deux implications.

La condition nécessaire (sens direct) consiste en la manipulation de transposées de produits.

La condition suffisante (réciproque) requiert de choisir judicieusement la matrice  $X$ .

---

## Résolution



On suppose ici que la matrice  $A$  est antisymétrique.

On a donc :  ${}^t A = -A$ .

Pour tout  $X$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a alors :  ${}^t X.{}^t A.X = {}^t X.(-A).X$ .

Soit :  ${}^t ({}^t X.A.X) = -({}^t X.A.X)$ .

Or,  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  et on a :  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors :  ${}^t X.A.X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ .

Il en découle :  ${}^t ({}^t X.A.X) = {}^t X.A.X$  et enfin :

$${}^t ({}^t X.A.X) = -({}^t X.A.X) \Leftrightarrow {}^t X.A.X = -({}^t X.A.X)$$

La matrice  ${}^t X.A.X$  ne comportant qu'un seul coefficient, l'égalité  ${}^t X.A.X = -({}^t X.A.X)$  entraîne  ${}^t X.A.X = 0_1$ , matrice nulle de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  que l'on peut identifier à 0.

Le résultat est ainsi établi.



Supposons maintenant : que l'on ait :  $\forall X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), {}^t X.A.X = -({}^t X.A.X)$ .

En posant  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , on a immédiatement :  ${}^t X = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$  puis, classiquement (le

cas échéant, à savoir retrouver rapidement) :

$${}^t X.A.X = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j = \sum_i x_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j$$

Soit alors  $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

Choisissons  $X$  de telle sorte que  $x_{i_0} = 1$  et pour tout  $i$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  différent de  $i_0$  :  $x_i = 0$ .

Dans ce cas :  ${}^t X.A.X = \sum_i a_{ii}x_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j = a_{i_0 i_0} x_{i_0}^2 + 0 = a_{i_0 i_0}$ .

L'égalité  ${}^t X.A.X = -({}^t X.A.X)$  se réécrit donc  $a_{i_0 i_0} = -a_{i_0 i_0}$  et on en déduit :  $a_{i_0 i_0} = 0$ .

Le raisonnement étant valable pour tout entier  $i_0$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , on en déduit que tous les coefficients diagonaux de  $A$  sont nuls.

On a donc désormais, pour tout  $X$  de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  :  ${}^t X.A.X = \sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j$ .

Soit alors  $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tels que  $i_0 \neq j_0$ .

Choisissons alors  $X$  de telle sorte que  $x_{i_0} = x_{j_0} = 1$  et, pour tout entier  $k$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  différent de  $i_0$  et  $j_0$  :  $x_k = 0$ .

Dans ce cas :  ${}^t X.A.X = \sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j = a_{i_0 j_0} x_{i_0} x_{j_0} + a_{j_0 i_0} x_{j_0} x_{i_0} = a_{i_0 j_0} + a_{j_0 i_0}$ .

L'égalité  ${}^t X.A.X = -({}^t X.A.X)$  se réécrit cette fois  $a_{i_0 j_0} + a_{j_0 i_0} = -(a_{i_0 j_0} + a_{j_0 i_0})$  et on en déduit :  $a_{i_0 j_0} + a_{j_0 i_0} = 0$ , c'est-à-dire :  $a_{j_0 i_0} = -a_{i_0 j_0}$ .

On a donc, en tenant compte du premier résultat :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,  $a_{ji} = -a_{ij}$ .

La matrice  $A$  est bien antisymétrique.

## Résultat final

Pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

$$A \text{ antisymétrique} \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), {}^t X.A.X = -({}^t X.A.X)$$