

Soit m un réel.

Déterminer, en fonction de m , le rang de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$$

Analyse

On effectue des opérations classiques sur les lignes et les colonnes de façon à se ramener à la détermination du rang d'une matrice échelonnée.

Résolution

$$\begin{aligned} \text{rg } M &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+m & -1 & -1-m \\ 0 & -m+1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m & 1 \\ 0 & -m+1 & 1 & -1 \\ 0 & 1+m & -1 & -1-m \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_4 \\ L_4 \leftrightarrow L_2 \end{array} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m & 1 \\ 0 & 1+m & -1 & -1-m \\ 0 & -m+1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftrightarrow L_4 \\ L_4 \leftrightarrow L_3 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1-m \\ 0 & -m & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1-m \\ 0 & 0 & 1+m^2 & -1+m \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 + mL_2 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_4 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1-m \\ 0 & 0 & 0 & -1+m+(1+m^2)(-1-m) \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 + (1+m^2)L_3 \end{array} \end{aligned}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1-m \\ 0 & 0 & 0 & -(m^3+m^2+2) \end{pmatrix}$$

Posons alors $\Phi(m) = m^3 + m^2 + 2$.

Φ est une fonction polynôme de degré 3. Elle s'annule donc au moins une fois sur \mathbb{R} et on en tire immédiatement la discussion suivante :

- Si $m^3 + m^2 + 2 \neq 0$, le rang de M est celui d'une matrice triangulaire supérieure dont les quatre coefficients diagonaux sont non nuls. D'où : $\text{rg } M = 4$.
- Si $m^3 + m^2 + 2 = 0$, on a alors :

$$\text{rg } M = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1-m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où m vérifie donc : $m^3 + m^2 + 2 = 0$.

Le rang de M est égal au rang d'une matrice échelonnée comportant 3 pivots. On a donc $\text{rg } M = 3$.

Résultat final

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1-m \\ 0 & 0 & 0 & -(m^3+m^2+2) \end{pmatrix} = \begin{cases} 4 & \text{si } m^3 + m^2 + 2 \neq 0 \\ 3 & \text{si } m^3 + m^2 + 2 = 0 \end{cases}$$