

Soit a et b deux complexes. On considère A et J les deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2 , A^2 et A^3 .
2. Pour tout n entier naturel, calculer $A^n = a_n I + b_n J$ où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
3. Montrer qu'il existe deux complexes β et γ tels que $A^2 + \beta A + \gamma I = 0$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit inversible. Calculer alors A^n pour tout entier n .
4. On suppose ici que a est un réel strictement positif.
Existe-t-il une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$?

Analyse

L'essentiel des résultats découle du fait que le carré de J est la matrice nulle : dès lors, toute puissance de A s'écrira, y compris lorsque A est inversible, sous la forme d'une combinaison linéaire des matrices I et J .

Résolution

Question 1.

On a facilement $J^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$.

Par ailleurs :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 2ab & a^2 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 3a^2b & a^3 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}, A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 2ab & a^2 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 3a^2b & a^3 \end{pmatrix}$$

Question 2.

Remarquons que l'on a : $A = aI + bJ$. Comme I et J commutent et que $J^2 = 0$, la formule du binôme nous donne alors :

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k I^{n-k} J^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k J^k \\ &= \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 J^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 J^1 \\ &= a^n I + na^{n-1} b J \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = a_n I + b_n J$$

avec $a_n = a^n$ et $b_n = na^{n-1}b$

Question 3.

On a $A = aI + bJ$. Donc $A - aI = bJ$ puis $(A - aI)^2 = (bJ)^2 = b^2 J^2$ soit enfin, en tenant compte de $J^2 = 0$: $(A - aI)^2 = 0 = A^2 - 2aA + a^2 I$.

On a aussi, grâce aux résultats précédents :

$$A^2 = a^2 I + 2abJ = 2a \left((aI + bJ) - \frac{a}{2} I \right) = 2a \left(A - \frac{a}{2} I \right) = 2aA - a^2 I$$

$$\text{La matrice } A \text{ vérifie } A^2 + \beta A + \gamma I = 0 \text{ avec } \beta = -2a \text{ et } \gamma = a^2.$$

L'égalité que nous venons d'obtenir se réécrit : $a^2 I = -A^2 + 2aA = A(-A + 2aI)$.

Ainsi :

- Si $a \neq 0$, on a : $I = \frac{1}{a^2} A(-A + 2aI) = A \times \left(\frac{1}{a^2} (-A + 2aI) \right)$ et on en conclut immédiatement que la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{a^2} (-A + 2aI)$.
- Si $a = 0$, on a $A^2 = 0$ et A n'est pas inversible.

En définitive la condition $a \neq 0$ est nécessaire et suffisante.

La matrice A est inversible si, et seulement si : $a \neq 0$.

$$\text{On a : } A^{-1} = \frac{1}{a^2}(-A + 2aI) = \frac{1}{a^2}(-(aI + bJ) + 2aI) = \frac{1}{a^2}(aI - bJ) = a^{-1}I + (-1) \times a^{-2}bJ.$$

Ainsi, la formule que nous avons obtenue à la question 2 reste encore valable pour $n = -1$.
Montrons par récurrence qu'elle est en fait valable pour tout entier strictement négatif.

Le résultat est valable pour $n = -1$.

Soit maintenant n un entier naturel non nul. On suppose que l'on a :

$$A^{-n} = a^{-n}I - na^{-n-1}bJ$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} A^{-(n+1)} &= A^{-n} \times A^{-1} \\ &= (a^{-n}I - na^{-n-1}bJ) \times (a^{-1}I - a^{-2}bJ) \\ &= a^{-n-1}I - a^{-n-2}bJ - na^{-n-2}bJ + na^{-n-3}b^2 J^2 \\ &= a^{-n-1}I - (n+1)a^{-n-2}bJ \\ &= a^{-(n+1)}I - (n+1)a^{-(n+1)-1}bJ \end{aligned}$$

Le résultat est donc valable au rang $n+1$ et on a donc, pour tout entier naturel n non nul :

$$A^{-n} = a^{-n}I - na^{-n-1}bJ$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, A^n = a_n I + b_n J$$

avec $a_n = a^n$ et $b_n = na^{n-1}b$

Question 4.

Pour $a > 0$:

$$A = a \left(I + \frac{b}{a} J \right) = a \left(I^2 + 2 \frac{b}{2a} J + J^2 \right) = a \left(I + \frac{b}{2a} J \right)^2 = \left(\sqrt{a} \left(I + \frac{b}{2a} J \right) \right)^2$$

Il suffit donc de considérer : $B = \sqrt{a} \left(I + \frac{b}{2a} J \right)$.

$$\text{Pour } B = \sqrt{a} \left(I + \frac{b}{2a} J \right), \text{ on a } B^2 = A.$$