Soit M une matrice nilpotente d'indice k dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $P = I + M + M^2 + M^3 + ... + M^{k-1}$.

1. Montrer que $I - M$ est inversible et calculer $(I-M)^{-1}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}.

Analyse

Rappelons qu'une matrice M est nilpotente d'indice k si on a : $\forall i \in [\![0\,;k-1]\!], M^i \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ et $M^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$. La définition de la matrice P doit faire penser à une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique. On est ainsi conduit à évaluer MP.
Dans la seconde question, on doit se ramener à la situation de la première question en écrivant la matrice A sous la forme $I - M$.

Résolution

Question 1.

$P = I + M + M^2 + M^3 + ... + M^{k-2} + M^{k-1}$ d'où : $MP = M + M^2 + M^3 + M^4 + ... + M^{k-1} + \underbrace{M^k}_{=0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}$.

Il vient alors : $P - MP = I$, soit : $P(I-M) = I$. On en déduit que la matrice $I - M$ est inversible à gauche, donc inversible, d'inverse la matrice P.

$$\boxed{\text{La matrice } I - M \text{ est inversible et } (I-M)^{-1} = P.}$$

Question 2.

On peut écrire : $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-\underbrace{\begin{pmatrix}0&-2&-3&-4\\0&0&-2&-3\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}}_{=M}=I-M$.

Or :

$$M^2=\begin{pmatrix}0&0&4&12\\0&0&0&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ M^3=\begin{pmatrix}0&0&0&-8\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ \text{et}\ M^4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$$

Ainsi, la matrice M est nilpotente d'indice de nilpotence 4. D'après la question précédente, on a immédiatement :

$$\begin{aligned}A^{-1}&=(I-M)^{-1}=I+M+M^2+M^3\\&=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-2&-3&-4\\0&0&-2&-3\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&4&12\\0&0&0&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&-8\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}}$$

On se donnera bien sûr la peine de vérifier que l'on a :

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$