Soit M la matrice de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) définie par :

$$M=\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & CA^{-1}B \end{array}\right)$$

avec : $A\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, $B\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $C\in\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Montrer que M n'est pas inversible.

Analyse

Il existe bien des façons de montrer qu'un matrice est ou non inversible. Ici, au regard de la définition de la matrice M, on peut s'intéresser à la résolution d'un système en tirant parti de la structure en bloc de M…

Résolution

Dans la solution ci-après, nous allons raisonner par l'absurde.

Soit x et y deux scalaires et X et Y deux éléments de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Supposons que la matrice M soit inversible.
Dans ces conditions, le système (S), d'inconnue $\left(\begin{array}{c} X \\ \hline x \end{array}\right)$:

$$(S)\qquad M\left(\begin{array}{c} X \\ \hline x \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} Y \\ \hline y \end{array}\right)$$

admet une unique solution <u>pour toute matrice colonne</u> $\left(\begin{array}{c} Y \\ \hline y \end{array}\right)$ de $\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{K})$.

Or :

$$M\begin{pmatrix} X \\ \hdashline x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Y \\ \hdashline y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & CA^{-1}B \end{array}\right)\begin{pmatrix} X \\ \hdashline x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Y \\ \hdashline y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} AX+xB=Y \\ CX+xCA^{-1}B=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xB=Y-AX \\ CX+CA^{-1}(xB)=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xB=Y-AX \\ CX+CA^{-1}(Y-AX)=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xB=Y-AX \\ CX+CA^{-1}Y-CA^{-1}AX=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xB=Y-AX \\ CX+CA^{-1}Y-CX=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xB=Y-AX \\ CA^{-1}Y=y \end{cases}$$

La deuxième égalité obtenue ne peut être vraie pour toute matrice colonne $\begin{pmatrix} Y \\ \hdashline y \end{pmatrix}$.

Pour s’en convaincre, on peut, par exemple, choisir pour Y le produit : $A\,{}^{t}C$.
On aura alors : $CA^{-1}Y=CA^{-1}A\,{}^{t}C=C\,{}^{t}C$.
Il suffit alors de choisir $y\neq C\,{}^{t}C$ pour que la deuxième égalité ne soit pas vérifiée.

Nous avons ainsi abouti à une contradiction : la matrice M n’est pas inversible.