

Soit A une matrice symétrique réelle.

Montrer que :

$$(\operatorname{tr} A)^2 \leq \operatorname{rg} A \times \operatorname{tr} A^2$$

Analyse

Rappelons que toute matrice réelle symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et que la matrice de passage est alors orthogonale.

Résolution

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique de dimension n .

Soit $r = \operatorname{rg} A$.

Notons alors $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A .

Comme A est diagonalisable, il existe une matrice orthogonale Q telle que :

$$A = Q \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & (0) & & & \\ & (0) & \ddots & & & \\ & & & \lambda_r & & \\ \hline & & & & 0 & \\ & (0) & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{array} \right) {}^tQ \text{ avec } {}^tQ = Q^{-1}$$

On a alors immédiatement :

$$A^2 = Q \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1^2 & & & & & \\ & \lambda_2^2 & (0) & & & \\ & (0) & \ddots & & & \\ & & & \lambda_r^2 & & \\ \hline & & & & 0 & \\ & (0) & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{array} \right) {}^tQ$$

D'où : $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r$ et $\operatorname{tr} A^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_r^2$.

Il convient donc de montrer : $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r)^2 \leq r(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_r^2)$.

Cette inégalité est en fait très générale.

Notons, dans un premier temps, que l'inégalité (qui est alors une égalité) est triviale dans le cas $r = 0$. Nous supposons donc dans la suite que l'on a $r > 0$.

La fonction carrée étant convexe sur \mathbb{R} , nous pouvons utiliser l'inégalité de Jensen avec tous les coefficients égaux à $\frac{1}{r}$:

$$\left(\frac{1}{r}\lambda_1 + \frac{1}{r}\lambda_2 + \dots + \frac{1}{r}\lambda_r\right)^2 \leq \frac{1}{r}\lambda_1^2 + \frac{1}{r}\lambda_2^2 + \dots + \frac{1}{r}\lambda_r^2$$

Soit :

$$\frac{1}{r^2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r)^2 \leq \frac{1}{r}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_r^2)$$

Finalement :

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r)^2 \leq r(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_r^2)$$

Le résultat est ainsi établi.

Résultat final

Pour toute matrice réelle symétrique A , on a :

$$(\operatorname{tr} A)^2 \leq \operatorname{rg} A \times \operatorname{tr} A^2$$