1. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix}$$

2. Généraliser.

Analyse

On peut classiquement effectuer des manipulations sur les lignes et les colonnes. On peut également adopter une approche plus … « vectorielle » en introduisant un vecteur judicieusement choisi. Cette deuxième approche permet plus facilement de généraliser le calcul …

Résolution

Question 1.

<u>$1^{\text{ère}}$ approche :</u>

En retranchant la première colonne à la seconde, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 0 & a-b-c \\ 2b & -b-c-a & 2b \\ c-a-b & a+b+c & 2c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 2a & 0 & a-b-c \\ 2b & -1 & 2b \\ c-a-b & 1 & 2c \end{vmatrix}$$

En retranchant alors la première colonne à la troisième, il vient :

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 2a & 0 & a-b-c \\ 2b & -1 & 2b \\ c-a-b & 1 & 2c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 2a & 0 & -a-b-c \\ 2b & -1 & 0 \\ c-a-b & 1 & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2a & 0 & -1 \\ 2b & -1 & 0 \\ c-a-b & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On peut permuter la troisième et la première colonne :

$$(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2a & 0 & -1 \\ 2b & -1 & 0 \\ c-a-b & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a+b+c)^2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 2b \\ 1 & 1 & c-a-b \end{vmatrix}$$

On ajoute alors la première ligne à la dernière :

$$-(a+b+c)^2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 2b \\ 1 & 1 & c-a-b \end{vmatrix} = -(a+b+c)^2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 2b \\ 0 & 1 & c+a-b \end{vmatrix}$$

En développant alors suivant la première colonne on obtient finalement :

$$\begin{aligned} -(a+b+c)^2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 2b \\ 0 & 1 & c+a-b \end{vmatrix} &= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} -1 & 2b \\ 1 & c+a-b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)^2(-c-a+b-2b) \\ &= (a+b+c)^2(-c-a-b) \\ &= -(a+b+c)^3 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix} = -(a+b+c)^3$$

<u>$2^{\text{ème}}$ approche :</u>

On remarque que :

$$\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2a & 2a-(a+b+c) \\ 2b & 2b-(a+b+c) & 2b \\ 2c-(a+b+c) & 2c & 2c \end{vmatrix}$$

Supposons que l'espace vectoriel considéré soit rapporté à la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Posons alors $s=a+b+c$ et définissons le vecteur $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$.

Dans ces conditions, on a :

$$\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2a & 2a-(a+b+c) \\ 2b & 2b-(a+b+c) & 2b \\ 2c-(a+b+c) & 2c & 2c \end{vmatrix}$$

$$= \det\left(2\vec{u} - s\vec{k}, 2\vec{u} - s\vec{j}, 2\vec{u} - s\vec{i}\right)$$

On peut ainsi utiliser directement la multi linéarité du déterminant et remarquer qu'en développant tout déterminant faisant apparaître au moins deux fois le vecteur $\vec{u}$ sera nul.
Il vient donc :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix} &= \det\left(2\vec{u} - s\vec{k}, 2\vec{u} - s\vec{j}, 2\vec{u} - s\vec{i}\right) \\
&= \det\left(2\vec{u}, -s\vec{j}, -s\vec{i}\right) + \det\left(-s\vec{k}, 2\vec{u}, -s\vec{i}\right) \\
&\quad + \det\left(-s\vec{k}, -s\vec{j}, 2\vec{u}\right) + \det\left(-s\vec{k}, -s\vec{j}, -s\vec{i}\right) \\
&= 2\times(-s)\times(-s)\times\left[\det\left(\vec{u}, \vec{j}, \vec{i}\right) + \det\left(\vec{k}, \vec{u}, \vec{i}\right) + \det\left(\vec{k}, \vec{j}, \vec{u}\right)\right] \\
&\quad + (-s)\times(-s)\times(-s)\times\det\left(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\right) \\
&= 2s^2\times\left[\det\left(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\right) + \det\left(\vec{k}, a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, \vec{i}\right)\right. \\
&\quad \left. + \det\left(\vec{k}, \vec{j}, a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\right)\right] - s^3\times\det\left(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\right) \\
&= 2s^2\times\left[\det\left(c\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\right) + \det\left(\vec{k}, b\vec{j}, \vec{i}\right) + \det\left(\vec{k}, \vec{j}, a\vec{i}\right)\right] - s^3\times\det\left(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\right) \\
&= 2s^2\times(a+b+c)\times\det\left(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\right) - s^3\times\det\left(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\right) \\
&= 2s^3\det\left(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\right) - s^3\times\det\left(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\right) \\
&= s^3\det\left(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\right)
\end{aligned}$$

Or, on a :

$$\det\left(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Finalement :

$$\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix} = -s^3 = -(a+b+c)^3$$

Question 2.

On peut généraliser le calcul précédent en posant, pour tout entier naturel non nul :

$$\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_1 & \dots & 2a_1 & a_1-a_2-a_3-\dots-a_{n-1}-a_n \\ 2a_2 & 2a_2 & \dots & a_2-a_1-a_3-\dots-a_{n-1}-a_n & 2a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a_{n-1} & a_{n-1}-a_1-a_2-\dots-a_{n-2}-a_n & \dots & 2a_{n-1} & 2a_{n-1} \\ a_n-a_1-a_2-\dots-a_{n-1} & 2a_n & \dots & 2a_n & 2a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_1 & \dots & 2a_1 & a_1-\sum_{i\neq 1} a_i \\ 2a_2 & 2a_2 & \dots & a_2-\sum_{i\neq 2} a_i & 2a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a_{n-1} & a_{n-1}-\sum_{i\neq n-1} a_i & \dots & 2a_{n-1} & 2a_{n-1} \\ a_n-\sum_{i\neq n} a_i & 2a_n & \dots & 2a_n & 2a_n \end{vmatrix} = d_n$$

En posant $s=\sum_{i=1}^{n} a_i$, on obtient :

$$d_n = \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_1 & \dots & 2a_1 & a_1-\sum_{i\neq 1} a_i \\ 2a_2 & 2a_2 & \dots & a_2-\sum_{i\neq 2} a_i & 2a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a_{n-1} & a_{n-1}-\sum_{i\neq n-1} a_i & \dots & 2a_{n-1} & 2a_{n-1} \\ a_n-\sum_{i\neq n} a_i & 2a_n & \dots & 2a_n & 2a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_1 & \dots & 2a_1 & a_1-s \\ 2a_2 & 2a_2 & \dots & 2a_2-s & 2a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a_{n-1} & 2a_{n-1}-s & \dots & 2a_{n-1} & 2a_{n-1} \\ 2a_n-s & 2a_n & \dots & 2a_n & 2a_n \end{vmatrix}$$

En notant $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ la base de l'espace vectoriel considéré et en posant $\vec{u}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+\dots+a_n\vec{e}_n$, il vient alors :

$$d_n = \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_1 & \dots & 2a_1 & a_1-s \\ 2a_2 & 2a_2 & \dots & 2a_2-s & 2a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a_{n-1} & 2a_{n-1}-s & \dots & 2a_{n-1} & 2a_{n-1} \\ 2a_n-s & 2a_n & \dots & 2a_n & 2a_n \end{vmatrix} = \det\left(2\vec{u}-s\vec{e}_n, 2\vec{u}-s\vec{e}_{n-1},\dots,2\vec{u}-s\vec{e}_2,2\vec{u}-s\vec{e}_1\right)$$

En procédant comme précédemment (développement du déterminant), on ne conserve que les déterminants où le vecteur $\vec{u}$ apparaît au plus une fois et il vient :

$$\begin{aligned}
d_n &= \det\left(2\vec{u}-s\vec{e}_n, 2\vec{u}-s\vec{e}_{n-1}, ..., 2\vec{u}-s\vec{e}_2, 2\vec{u}-s\vec{e}_1\right)\\
&= \det\left(2\vec{u}, -s\vec{e}_{n-1}, ..., -s\vec{e}_2, -s\vec{e}_1\right) + \det\left(-s\vec{e}_n, 2\vec{u}, -s\vec{e}_{n-2}, ..., -s\vec{e}_2, -s\vec{e}_1\right)\\
&\qquad + ... + \det\left(-s\vec{e}_n, -s\vec{e}_{n-1}, ..., -s\vec{e}_2, 2\vec{u}\right) + \det\left(-s\vec{e}_n, -s\vec{e}_{n-1}, ..., -s\vec{e}_2, -s\vec{e}_1\right)\\
&= 2(-s)^{n-1}\det\left(\vec{u}, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right) + 2(-s)^{n-1}\det\left(\vec{e}_n, \vec{u}, \vec{e}_{n-2}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right)\\
&\qquad + ... + 2(-s)^{n-1}\det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{u}\right) + (-s)^n\det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right)\\
&= 2(-s)^{n-1}\Big[\det\left(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + ... + a_n\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right) + \det\left(\vec{e}_n, a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + ... + a_n\vec{e}_n, \vec{e}_{n-2}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right)\\
&\qquad + ... + \det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + ... + a_n\vec{e}_n\right)\Big] + (-s)^n\det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right)\\
&= 2(-s)^{n-1}\Big[\det\left(a_n\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right) + \det\left(\vec{e}_n, a_{n-1}\vec{e}_{n-1}, \vec{e}_{n-2}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right)\\
&\qquad + ... + \det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, a_1\vec{e}_1\right)\Big] + (-s)^n\det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right)\\
&= 2(-s)^{n-1}\left(a_n + a_{n-1} + ... + a_1\right)\det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right) + (-s)^n\det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right)\\
&= 2s(-s)^{n-1}\det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right) + (-s)^n\det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right)\\
&= (-s)^{n-1}(2s-s)\det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right)\\
&= s(-s)^{n-1}\det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right)\\
&= (-1)^{n-1}s^n\det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right)
\end{aligned}$$

Il convient désormais de calculer $\det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right)$.

C'est un calcul classique que l'on peut mener par récurrence, par exemple, où directement à partir de :

$$\det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 1\\ 0 & 0 & ... & 1 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 1 & ... & 0 & 0\\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en développant suivant la dernière colonne …

On obtient : $\det\left(\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Finalement :

$$d_n = (-1)^{n-1}s^n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)}s^n = (-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}s^n = -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}s^n$$

Résultat final

On a :

$$\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix} = -s^3 = -(a+b+c)^3$$

Plus généralement :

$$\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_1 & \dots & 2a_1 & a_1 - \sum_{i\neq 1} a_i \\ 2a_2 & 2a_2 & \dots & a_2 - \sum_{i\neq 2} a_i & 2a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a_{n-1} & a_{n-1} - \sum_{i\neq n-1} a_i & \dots & 2a_{n-1} & 2a_{n-1} \\ a_n - \sum_{i\neq n} a_i & 2a_n & \dots & 2a_n & 2a_n \end{vmatrix} = -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} s^n$$

avec :

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i$$