Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Analyse

On effectue classiquement des manipulations sur les lignes et les colonnes.

Résolution

En retranchant la quatrième colonne à la première, on obtient :

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & c & c & b \\ 0 & a & b & c \\ 0 & b & a & c \\ b-a & c & c & a \end{vmatrix} = (a-b)\begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a & b & c \\ 0 & b & a & c \\ -1 & c & c & a \end{vmatrix}$$

En retranchant alors la troisième colonne à la seconde :

$$(a-b)\begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a & b & c \\ 0 & b & a & c \\ -1 & c & c & a \end{vmatrix} = (a-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & a-b & b & c \\ 0 & b-a & a & c \\ -1 & 0 & c & a \end{vmatrix} = (a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & -1 & a & c \\ -1 & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

On ajoute alors la première ligne à la quatrième puis la seconde à la troisième :

$$(a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & -1 & a & c \\ -1 & 0 & c & a \end{vmatrix} = (a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & -1 & a & c \\ 0 & 0 & 2c & a+b \end{vmatrix} = (a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 0 & a+b & 2c \\ 0 & 0 & 2c & a+b \end{vmatrix}$$

Il ne reste plus alors qu'à développer suivant la première colonne :

$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 0 & a+b & 2c \\ 0 & 0 & 2c & a+b \end{vmatrix} &= (a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a+b & 2c \\ 0 & 2c & a+b \end{vmatrix} \\
&= (a-b)^2 \left[(a+b)^2 - (2c)^2 \right] \\
&= (a-b)^2 (a+b+2c)(a+b-2c)
\end{aligned}
$$

Résultat final

$$
\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = (a-b)^2 (a+b+2c)(a+b-2c)
$$