Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

Analyse

Si on note n l'ordre du déterminant, les cas $n=1$ et $n=2$ ne posent pas de difficulté particulière … On supposera donc $n \geq 3$. On constate alors que la première et la dernière colonne, similaires, se distinguent des autres. Si on note alors $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\right)$ une base de l'espace vectoriel considéré, on peut démarrer le calcul en introduisant le vecteur $\vec{w} = b\sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i$.

Résolution

On procède comme suggéré ci-dessus mais on introduit également le vecteur $\vec{v} = b\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_n\right)$.
Dans ces conditions, on a :

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+(a-b) & b & \dots & \dots & b \\ b & a & & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & (0) & & a & b \\ b & b & \dots & b & b+(a-b) \end{vmatrix}$$

$$= \det\left(\vec{w}+(a-b)\vec{e}_1, \vec{v}+a\vec{e}_2, \vec{v}+a\vec{e}_3, \dots, \vec{v}+a\vec{e}_{n-1}, \vec{w}+(a-b)\vec{e}_n\right)$$

Nous allons utiliser la multilinéarité du déterminant pour développer le déterminant ainsi exprimé. Il nous faut procéder avec … ordre !

En raisonnant sur les vecteurs de la première et de la dernière position (c'est à dire, fondamentalement, en raisonnant sur la première et la dernière colonne), nous allons obtenir :

- D'une part, des déterminants de la forme : $\det\left(\vec{w},...,(a-b)\vec{e}_n\right)$. Pour de tels déterminants, on a la possibilité de faire apparaître le vecteur $\vec{v}$ <u>au plus une fois</u> en position 2, 3, …, $n-1$. On obtient alors :
  - Si on ne fait pas apparaître le vecteur $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}\det\left(\vec{w},a\vec{e}_2,a\vec{e}_3,...,a\vec{e}_{n-1},(a-b)\vec{e}_n\right) &= \det\left(b\sum_{i=1}^{n}\vec{e}_i,a\vec{e}_2,a\vec{e}_3,...,a\vec{e}_{n-1},(a-b)\vec{e}_n\right)\\ &= b(a-b)a^{n-2}\det\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,...,\vec{e}_{n-1},\vec{e}_n\right)\\ &= b(a-b)a^{n-2}\end{aligned}$$

  - Si on fait apparaître le vecteur $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}&\det\Bigg(\vec{w},a\vec{e}_2,a\vec{e}_3,..., \underbrace{\vec{v}}_{\substack{\text{Ce vecteur est en}\\ i\text{ème position}}},...,a\vec{e}_{n-1},(a-b)\vec{e}_n\Bigg)\\
&= \det\Bigg(b\sum_{k=1}^{n}\vec{e}_k,a\vec{e}_2,a\vec{e}_3,..., \underbrace{b\left(\vec{e}_1+\vec{e}_n\right)}_{\substack{\text{Ce vecteur est en}\\ i\text{ème position}}},...,a\vec{e}_{n-1},(a-b)\vec{e}_n\Bigg)\\
&= \det\Bigg(b\sum_{k=1}^{n}\vec{e}_k,a\vec{e}_2,a\vec{e}_3,..., \underbrace{b\vec{e}_1}_{\substack{\text{Ce vecteur est en}\\ i\text{ème position}}},...,a\vec{e}_{n-1},(a-b)\vec{e}_n\Bigg)\\
&= \det\left(b\vec{e}_i,a\vec{e}_2,a\vec{e}_3,...,b\vec{e}_1,...,a\vec{e}_{n-1},(a-b)\vec{e}_n\right)\\
&= b^2(a-b)a^{n-3}\det\left(\boxed{\vec{e}_i},\vec{e}_2,\vec{e}_3,...,\boxed{\vec{e}_1},...,\vec{e}_{n-1},\vec{e}_n\right)\\
&= -b^2(a-b)a^{n-3}\end{aligned}$$

  Et il y a $n-2$ déterminants de ce type.

- D'autre part, des déterminants de la forme : $\det\left((a-b)\vec{e}_1,...,\vec{w}\right)$.

  Ils sont « symétriques » des précédents et nous ne détaillons pas à nouveau la démarche, les résultats obtenus étant identiques …

- Enfin, un déterminant où le vecteur $\vec{w}$ n'apparaît pas :

$$\det\left((a-b)\vec{e}_1,\vec{v}+a\vec{e}_2,...,\vec{v}+a\vec{e}_{n-1},(a-b)\vec{e}_n\right)=(a-b)^2\det\left(\vec{e}_1,\vec{v}+a\vec{e}_2,...,\vec{v}+a\vec{e}_{n-1},\vec{e}_n\right).$$

  Rappelons ici que l'on a : $\vec{v}=b\left(\vec{e}_1+\vec{e}_n\right)$. En position 2, 3, …, $n-2$ de ce déterminant, on a donc simplement ajouté une combinaison linéaire des vecteurs ($\vec{e}_1$ et $\vec{e}_n$) apparaissant en première et dernière position.

On a alors :

$$\begin{aligned}\det\left(\left(a-b\right)\vec{e}_1,\vec{v}+a\vec{e}_2,...,\vec{v}+a\vec{e}_{n-1},\left(a-b\right)\vec{e}_n\right) &= \left(a-b\right)^2\det\left(\vec{e}_1,\vec{v}+a\vec{e}_2,...,\vec{v}+a\vec{e}_{n-1},\vec{e}_n\right)\\ &= \left(a-b\right)^2\det\left(\vec{e}_1,a\vec{e}_2,...,a\vec{e}_{n-1},\vec{e}_n\right)\\ &= \left(a-b\right)^2 a^{n-2}\det\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_{n-1},\vec{e}_n\right)\\ &= \left(a-b\right)^2 a^{n-2}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}&\det\left(\vec{w}+\left(a-b\right)\vec{e}_1,\vec{v}+a\vec{e}_2,\vec{v}+a\vec{e}_3,...,\vec{v}+a\vec{e}_{n-1},\vec{w}+\left(a-b\right)\vec{e}_n\right)\\ &= \det\left(\vec{w},a\vec{e}_2,a\vec{e}_3,...,a\vec{e}_{n-1},\left(a-b\right)\vec{e}_n\right)\\ &+\sum_{i=2}^{n-1}\det\left(\vec{w},a\vec{e}_2,a\vec{e}_3,...,\underbrace{\vec{v}}_{\substack{\text{Ce vecteur est en}\\ i\text{ème position}}},...,a\vec{e}_{n-1},\left(a-b\right)\vec{e}_n\right)\\ &+\det\left(\left(a-b\right)\vec{e}_1,a\vec{e}_2,a\vec{e}_3,...,a\vec{e}_{n-1},\vec{w}\right)\\ &+\sum_{i=2}^{n-1}\det\left(\left(a-b\right)\vec{e}_1,a\vec{e}_2,a\vec{e}_3,...,\underbrace{\vec{v}}_{\substack{\text{Ce vecteur est en}\\ i\text{ème position}}},...,a\vec{e}_{n-1},\vec{w}\right)\\ &+\det\left(\left(a-b\right)\vec{e}_1,\vec{v}+a\vec{e}_2,...,\vec{v}+a\vec{e}_{n-1},\left(a-b\right)\vec{e}_n\right)\\ &= 2\left\{b\left(a-b\right)a^{n-2}+\left(n-2\right)\left[-\left(a-b\right)b^2a^{n-3}\right]\right\}+\left(a-b\right)^2 a^{n-2}\\ &= \left(a-b\right)a^{n-2}\left[2b+\left(a-b\right)\right]-2\left(n-2\right)\left(a-b\right)b^2a^{n-3}\\ &= \left(a-b\right)a^{n-3}\left[a\left(a+b\right)-2\left(n-2\right)b^2\right]\end{aligned}$$

Résultat final

Pour $n\geq 3$:

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b\\ b & \ddots & (0) & \vdots\\ \vdots & (0) & \ddots & b\\ b & \dots & b & a\end{vmatrix} = \left(a-b\right)a^{n-3}\left[a\left(a+b\right)-2\left(n-2\right)b^2\right]$$