

Calculer, pour les entiers naturels n et m tels que $0 \leq m \leq n$, le déterminant :

$$\begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^m \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n+m}^0 & C_{n+m}^1 & \dots & C_{n+m}^m \end{vmatrix}$$

Analyse

Nous avons affaire au calcul d'un déterminant d'ordre $m+1$. On peut, pour n fixé calculer quelques-uns des déterminants correspondant aux premières valeurs de m pour se faire une idée du résultat ...

Résolution

Notons $d(m, n)$ le déterminant à calculer.

Soit alors n un entier naturel. On a :

$$d(0, n) = \begin{vmatrix} C_n^0 \end{vmatrix} = C_n^0 = 1$$

Si n est non nul on a ensuite :

$$d(1, n) = \begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & n \\ 1 & n+1 \end{vmatrix} = n+1 - n = 1$$

Si n est strictement supérieur à 1, on a :

$$\begin{aligned}
 d(2, n) &= \begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 \\ C_{n+2}^0 & C_{n+2}^1 & C_{n+2}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 & n+2 & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n^2 - n \\ 1 & n+1 & n^2 + n \\ 1 & n+2 & n^2 + 3n + 2 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n^2 - n \\ 1 & n+1 & n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n+2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n^2 - n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 1 & 2n+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & n \\ 1 & n+1 \end{vmatrix} = 1
 \end{aligned}$$

Soit alors n un entier naturel non nul.

Montrons, pour tout entier naturel m inférieur ou égal à n , que l'on a : $d(m, n) = 1$

D'après les calculs menés précédemment, la propriété est vraie pour $m = 0$ et $m = 1$.

Supposons que n soit strictement supérieur à 1 et supposons que l'on ait $d(m, n) = 1$ avec $m < n$.

Intéressons-nous alors à $d(m+1, n)$.

$$d(m+1, n) = \begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^m & C_n^{m+1} \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^m & C_{n+1}^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{n+m}^0 & C_{n+m}^1 & \dots & C_{n+m}^m & C_{n+m}^{m+1} \\ C_{n+m+1}^0 & C_{n+m+1}^1 & \dots & C_{n+m+1}^m & C_{n+m+1}^{m+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & \dots & C_n^m & C_n^{m+1} \\ 1 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^m & C_{n+1}^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & C_{n+m}^1 & \dots & C_{n+m}^m & C_{n+m}^{m+1} \\ 1 & C_{n+m+1}^1 & \dots & C_{n+m+1}^m & C_{n+m+1}^{m+1} \end{vmatrix}$$

On soustrait l'avant-dernière ligne à la dernière et on tient compte de la relation fondamentale

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_{n+1}^{p+1} :$$

$$\begin{aligned}
 d(m+1, n) &= \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & \dots & C_n^m & C_n^{m+1} \\ 1 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^m & C_{n+1}^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & C_{n+m}^1 & \dots & C_{n+m}^m & C_{n+m}^{m+1} \\ 1 & C_{n+m+1}^1 & \dots & C_{n+m+1}^m & C_{n+m+1}^{m+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & \dots & C_n^m & C_n^{m+1} \\ 1 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^m & C_{n+1}^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & C_{n+m}^1 & \dots & C_{n+m}^m & C_{n+m}^{m+1} \\ 0 & C_{n+m+1}^1 - C_{n+m}^1 & \dots & C_{n+m+1}^m - C_{n+m}^m & C_{n+m+1}^{m+1} - C_{n+m}^{m+1} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & \dots & C_n^m & C_n^{m+1} \\ 1 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^m & C_{n+1}^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & C_{n+m}^1 & \dots & C_{n+m}^m & C_{n+m}^{m+1} \\ 0 & C_{n+m}^0 & \dots & C_{n+m}^{m-1} & C_{n+m}^m \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

On poursuit de façon analogue en « remontant » :

$$\begin{aligned}
 d(m+1, n) &= \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & \dots & C_n^m & C_n^{m+1} \\ 1 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^m & C_{n+1}^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & C_{n+m}^1 & \dots & C_{n+m}^m & C_{n+m}^{m+1} \\ 0 & C_{n+m}^0 & \dots & C_{n+m}^{m-1} & C_{n+m}^m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & \dots & C_n^m & C_n^{m+1} \\ 1 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^m & C_{n+1}^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & C_{n+m-1}^1 & \dots & C_{n+m-1}^m & C_{n+m-1}^{m+1} \\ 0 & C_{n+m-1}^0 & \dots & C_{n+m-1}^{m-1} & C_{n+m-1}^m \\ 0 & C_{n+m}^0 & \dots & C_{n+m}^{m-1} & C_{n+m}^m \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & \dots & C_n^m & C_n^{m+1} \\ 1 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^m & C_{n+1}^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & C_{n+m-2}^0 & \dots & C_{n+m-2}^{m-1} & C_{n+m-2}^m \\ 0 & C_{n+m-1}^0 & \dots & C_{n+m-1}^{m-1} & C_{n+m-1}^m \\ 0 & C_{n+m}^0 & \dots & C_{n+m}^{m-1} & C_{n+m}^m \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & \dots & C_n^m & C_n^{m+1} \\ 0 & C_n^0 & \dots & C_n^{m-1} & C_n^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & C_{n+m-2}^0 & \dots & C_{n+m-2}^{m-1} & C_{n+m-2}^m \\ 0 & C_{n+m-1}^0 & \dots & C_{n+m-1}^{m-1} & C_{n+m-1}^m \\ 0 & C_{n+m}^0 & \dots & C_{n+m}^{m-1} & C_{n+m}^m \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^{m-1} & C_n^m \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^{m-1} & C_{n+1}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{n+m-1}^0 & C_{n+m-1}^1 & \dots & C_{n+m-1}^{m-1} & C_{n+m-1}^m \\ C_{n+m}^0 & C_{n+m}^1 & \dots & C_{n+m}^{m-1} & C_{n+m}^m \end{vmatrix} = d(m, n)
 \end{aligned}$$

La propriété est ainsi établie au rang $m+1$.

Elle est donc vraie pour tout entier naturel inférieur ou égal à n .

Résultat final

Pour les entiers naturels n et m tels que $0 \leq m \leq n$:

$$\begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^m \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n+m}^0 & C_{n+m}^1 & \dots & C_{n+m}^m \end{vmatrix} = 1$$