

Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$$

## Analyse

Ce déterminant se calcule à l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes. On peut commencer par jeter un œil sur la première colonne ...

## Résolution

Le dernier élément de la première colonne est la somme des deux autres éléments de cette même colonne. On peut donc facilement faire apparaître un 0 en soustrayant à la dernière ligne la somme des deux premières :

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 0 & 1 & 3x+8 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - (L_1 + L_2) \end{matrix}$$

Multiplions la deuxième colonne par 2 (on doit alors faire apparaître un facteur  $\frac{1}{2}$ ) et retranchons-lui la dernière colonne :

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 0 & 1 & 3x+8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x+2 & 2(2x+3)-(3x+4) & 3x+4 \\ 2x+3 & 2(3x+4)-(4x+5) & 4x+5 \\ 0 & 2-(3x+8) & 3x+8 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x+2 & x+2 & 3x+4 \\ 2x+3 & 2x+3 & 4x+5 \\ 0 & -3x-6 & 3x+8 \end{vmatrix}$$

Retranchons alors la deuxième colonne à la première :

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x+2 & x+2 & 3x+4 \\ 2x+3 & 2x+3 & 4x+5 \\ 0 & -3x-6 & 3x+8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & x+2 & 3x+4 \\ 0 & 2x+3 & 4x+5 \\ 3x+6 & -3x-6 & 3x+8 \end{vmatrix}$$

Il ne reste plus alors qu'à développer suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & x+2 & 3x+4 \\ 0 & 2x+3 & 4x+5 \\ 3x+6 & -3x-6 & 3x+8 \end{vmatrix} &= \frac{1}{2} \times 3(x+2) [(x+2)(4x+5) - (3x+4)(2x+3)] \\ &= \frac{3}{2} (x+2) (4x^2 + 13x + 10 - 6x^2 - 17x - 12) \\ &= \frac{3}{2} (x+2) (-2x^2 - 4x - 2) \\ &= -3(x+2)(x^2 + 2x + 1) \\ &= -3(x+2)(x+1)^2 \end{aligned}$$

---

## Résultat final

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} = -3(x+2)(x+1)^2$$