

Calculer le déterminant de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Indication : on s'intéressera au produit $A.'A$

Analyse

On commence par calculer le produit $A.'A$ qui prend une forme très simple ...

Résolution

On a facilement :

$$\begin{aligned} A.'A &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{pmatrix} \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) I_4 \end{aligned}$$

On en tire alors :

$$\det(A.'A) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

Or, on a également :

$$\det(A.'A) = \det A \cdot \det('A) = (\det A)^2$$

On a finalement :

$$(\det A)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

Soit :

$$\det A = \pm (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

Le déterminant de la matrice A garde donc un signe constant quelles que soient les valeurs des réels a, b, c et d (il s'annule pour $a = b = c = d = 0$). En prenant $b = c = d = 0$, on a immédiatement : $\det A = a^4$.

Finalement :

$$\det A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

Résultat final

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$