Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1-x \end{vmatrix}$$

## Analyse

La première colonne permet de faire apparaître facilement de nombreux 0 …

## Résolution

Le déterminant est formellement défini pour $n \geq 2$. En soustrayant la première colonne à chacune des autres, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n-2-x \end{vmatrix}$$

On développe alors le déterminant obtenu suivant la première ligne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n-2-x \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-2-x \end{vmatrix} \\ &= (-x)(1-x)\dots(n-2-x) \\ &= (-1)^{n-1} x(x-1)\dots(x-n+2) \\ &= (-1)^{n-1} \prod_{i=0}^{n-2}(x-i) \end{aligned}$$

## Résultat final

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n-2-x \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} x(x-1)\dots(x-n+2) = (-1)^{n-1}\prod_{i=0}^{n-2}(x-i)$$