Calculer le déterminant ($n$ entier naturel non nul) :

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

## Analyse

La dernière ligne permet une simplification rapide du calcul …

## Résolution

En soustrayant la dernière ligne à toutes les autres, on obtient immédiatement :

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_n \\ L_2 - L_n \\ L_3 - L_n \\ \vdots \\ L_n \end{matrix}$$

On développe alors suivant la première colonne et il vient :

$$d_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

On est ainsi ramené au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1. Ce déterminant vaut 1 (produit des éléments diagonaux).

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_n = (-1)^{n+1}$$

## Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_n = (-1)^{n+1}$$