Calculer le déterminant (n entier naturel non nul) :

$$d_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Analyse

Faire porter son attention sur deux lignes consécutives …

Résolution

Soustraire deux lignes consécutives fait apparaître de nombreux zéros et un même élément que l'on va pouvoir factoriser.

$$d_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_{n-1} \\ L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n - a_{n-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_{n-1} \\ L_1 - L_{n-1} \end{matrix}$$

$$= (a_n - a_{n-1}) \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On recommence alors et on poursuit en remontant jusqu'à la deuxième ligne :

$$d_n = (a_n - a_{n-1}) \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_n - a_{n-1}) \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} - a_{n-2} & a_{n-1} - a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_n - a_{n-1})(a_{n-1} - a_{n-2}) \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = (a_n - a_{n-1})(a_{n-1} - a_{n-2}) \dots (a_2 - a_1) \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_n - a_{n-1})(a_{n-1} - a_{n-2}) \dots (a_2 - a_1) a_1 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Déterminant d'une matrice} \\ \text{triangulaire supérieure ne} \\ \text{comportant que des 1 sur} \\ \text{sa diagonale.}}}$$

$$= (a_n - a_{n-1})(a_{n-1} - a_{n-2}) \dots (a_2 - a_1) a_1$$

Introduisons alors : $a_0 = 0$. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} d_n &= (a_n - a_{n-1})(a_{n-1} - a_{n-2})\dots(a_2 - a_1)a_1 \\ &= (a_n - a_{n-1})(a_{n-1} - a_{n-2})\dots(a_2 - a_1)(a_1 - a_0) \\ &= \prod_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) \end{aligned}$$

Résultat final

$$d_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = (a_n - a_{n-1})(a_{n-1} - a_{n-2})\dots(a_2 - a_1)a_1 = \prod_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})$$

Avec : $a_0 = 0$.