Calculer le déterminant d'ordre n (n supérieur ou égal à 2) :

$$d_n(x)=\begin{vmatrix}1 & x & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & 1 & x & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & x & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x\\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

Analyse

Un développement direct suivant la première colonne permet d'obtenir rapidement une formule de récurrence et … le résultat !

Résolution

$$d_n(x)=\begin{vmatrix}1 & x & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & 1 & x & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & x & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x\\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1 & x\\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\underbrace{\begin{vmatrix}x & 0 & \dots & \dots & 0\\ 1 & x & \ddots & & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & 1 & x & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1 & x\end{vmatrix}}_{\substack{\text{Déterminant d'une matrice}\\ \text{triangulaire inférieure d'ordre } n-1\\ \text{dont tous les éléments diagonaux}\\ \text{sont égaux à } x.}}$$

$$=d_{n-1}(x)+(-1)^{n+1}x^{n-1}=d_{n-1}(x)+(-x)^{n-1}$$

En tenant compte de $d_2(x)=\begin{vmatrix}1 & x\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-x$ on obtient immédiatement pour $n\geq 2$:

$$d_n(x)=1-x+(-x)^2+(-x)^3+\dots+(-x)^{n-1}=\frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}=\frac{1-(-x)^n}{1+x}$$

Résultat final

$$d_n(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1-(-x)^n}{1+x}$$