Calculer le déterminant d'ordre n :

$$d_n(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & x-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & x-1 \end{vmatrix}$$

Analyse

Une expression vectorielle du déterminant proposé en permet le calcul « rapide » !

Résolution

Introduisons le vecteur à n composantes suivant : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Supposons que l'espace vectoriel de dimension n dans lequel nous travaillons soit rapporté à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Dans ces conditions, il vient :

$$d_n(x) = \det(x\vec{e}_1 - \vec{u}, x\vec{e}_2 - \vec{u}, \dots, x\vec{e}_n - \vec{u})$$

En utilisant la multilinéarité, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\det\left(x\vec{e}_1-\vec{u},x\vec{e}_2-\vec{u},\dots,x\vec{e}_n-\vec{u}\right) &= \det\left(x\vec{e}_1,x\vec{e}_2,\dots,x\vec{e}_n\right)\\
&\quad -\det\left(\vec{u},x\vec{e}_2,\dots,x\vec{e}_n\right)\\
&\quad -\det\left(x\vec{e}_1,\vec{u},x\vec{e}_3,\dots,x\vec{e}_n\right)\\
&\quad \dots\\
&\quad -\det\left(x\vec{e}_1,x\vec{e}_2,\dots,x\vec{e}_{n-1},\vec{u}\right)\\
&= x^n\det\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\right)\\
&\quad \left.\begin{array}{l}
-\det\left(\vec{e}_1,x\vec{e}_2,\dots,x\vec{e}_n\right)\\
-\det\left(x\vec{e}_1,\vec{e}_2,x\vec{e}_3,\dots,x\vec{e}_n\right)\\
\dots\\
-\det\left(x\vec{e}_1,x\vec{e}_2,\dots,x\vec{e}_{n-1},\vec{e}_n\right)
\end{array}\right\} n \text{ déterminants égaux}\\
&= x^n\det\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\right)-nx^{n-1}\det\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\right)
\end{aligned}$$

Finalement, en tenant compte de $\det\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\right)=1$, il vient :

$$\begin{aligned}
\det\left(x\vec{e}_1-\vec{u},x\vec{e}_2-\vec{u},\dots,x\vec{e}_n-\vec{u}\right) &= x^n-nx^{n-1}\\
&= x^{n-1}\left(x-n\right)
\end{aligned}$$

Résultat final

$$d_n\left(x\right)=\begin{vmatrix} x-1 & -1 & \dots & -1\\ -1 & x-1 & \dots & -1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & \dots & x-1 \end{vmatrix}=x^{n-1}\left(x-n\right)$$