

Calculer le déterminant d'ordre n (déterminant de Vandermonde) où $n \geq 2$:

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-2} & a_3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Analyse

La structure de ce déterminant, très classique, suggère de mener une récurrence, le calcul de V_2 et V_3 pouvant mener, si on ne la connaît pas, à proposer la formule générale. Mais la structure très particulière de ce déterminant peut également nous conduire à observer d'emblée les cas d'annulation et à en tirer profit. La correction propose les deux approches.

Résolution

1^{ère} approche

Pour $n = 2$, on a :

$$V(a_2, a_1) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

Pour $n = 3$, on a :

$$V(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

Diverses possibilités s'offrent à nous.

On peut, par exemple, développer suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
 V(a_1, a_2, a_3) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} \\
 &= a_2 a_3^2 - a_3 a_2^2 - a_1 a_3^2 + a_3 a_1^2 + a_1 a_2^2 - a_2 a_1^2 \\
 &= a_3^2 (a_2 - a_1) - a_3 (a_2^2 - a_1^2) + a_1 a_2 (a_2 - a_1) \\
 &= (a_2 - a_1) [a_3^2 - a_3 (a_2 + a_1) + a_1 a_2] \\
 &= (a_2 - a_1) [a_3^2 - a_3 a_1 - a_3 a_2 + a_1 a_2] \\
 &= (a_2 - a_1) [a_3 (a_3 - a_1) - a_2 (a_3 - a_1)] \\
 &= (a_2 - a_1) (a_3 - a_1) (a_3 - a_2)
 \end{aligned}$$

Ce calcul ne semble pas propice à une généralisation dans le cadre d'un raisonnement par récurrence. Mieux vaut, avant de développer, effectuer quelques transformations sur les colonnes afin de faire plus simplement apparaître les facteurs du résultat.

Nous commençons par retrancher à la troisième (et dernière) colonne a_1 fois la seconde :

$$\begin{aligned}
 V(a_1, a_2, a_3) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 - a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 - a_1 a_2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 - a_1 a_3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & a_2 (a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 & a_3 (a_3 - a_1) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Nous retranchons ensuite à la deuxième colonne a_1 fois la première :

$$\begin{aligned}
 V(a_1, a_2, a_3) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & a_2 (a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 & a_3 (a_3 - a_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_1 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2 (a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3 (a_3 - a_1) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2 (a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3 (a_3 - a_1) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

On factorise alors :

$$\begin{aligned}
 V(a_1, a_2, a_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} \\
 &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 \\ 1 & 1 & a_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

On développe alors suivant la première ligne :

$$\begin{aligned}
 V(a_1, a_2, a_3) &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 \\ 1 & 1 & a_3 \end{vmatrix} \\
 &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix} \\
 &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)V(a_2, a_3)
 \end{aligned}$$

La fin du calcul en révèle tout l'intérêt : un mécanisme de récurrence est apparu (ayant travaillé avec a_1 , c'est $V(a_2, a_3)$ qui apparaît à la fin. Si nous avions travaillé avec a_3 , par exemple, c'est naturellement, $V(a_1, a_2)$ qui serait apparu ...) !

Les calculs précédents conduisent à poser :

$$\boxed{V(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)}$$

Nous venons d'établir cette égalité pour $n = 2$ et $n = 3$. Supposons qu'elle soit vraie au rang n et montrons qu'elle l'est au rang $n + 1$.

On considère donc maintenant :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Nous procédons comme précédemment en partant de la dernière colonne (la colonne $n + 1$) à laquelle nous retranchons a_1 fois l'avant-dernière (la colonne n). Puis nous retranchons à

l'avant-dernière a_1 fois l'antépénultième (la colonne $n-1$) et ainsi de suite en finissant par retrancher à la seconde colonne a_1 fois la première. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 V(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_1 & a_1^2 - a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} - a_1^{n-1} & a_1^n - a_1^n \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_2^n - a_1 a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & a_3^n - a_1 a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} & a_n^n - a_1 a_n^{n-1} \\ 1 & a_{n+1} - a_1 & a_{n+1}^2 - a_1 a_{n+1} & \dots & a_{n+1}^{n-1} - a_1 a_{n+1}^{n-2} & a_{n+1}^n - a_1 a_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_2^{n-1}(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & a_3^{n-1}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) & a_n^{n-1}(a_n - a_1) \\ 1 & a_{n+1} - a_1 & a_{n+1}(a_{n+1} - a_1) & \dots & a_{n+1}^{n-2}(a_{n+1} - a_1) & a_{n+1}^{n-1}(a_{n+1} - a_1) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

On développe immédiatement suivant la première ligne :

$$\begin{aligned}
 V(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_2^{n-1}(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & a_3^{n-1}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) & a_n^{n-1}(a_n - a_1) \\ 1 & a_{n+1} - a_1 & a_{n+1}(a_{n+1} - a_1) & \dots & a_{n+1}^{n-2}(a_{n+1} - a_1) & a_{n+1}^{n-1}(a_{n+1} - a_1) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_2^{n-1}(a_2 - a_1) \\ a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & a_3^{n-1}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) & a_n^{n-1}(a_n - a_1) \\ a_{n+1} - a_1 & a_{n+1}(a_{n+1} - a_1) & \dots & a_{n+1}^{n-2}(a_{n+1} - a_1) & a_{n+1}^{n-1}(a_{n+1} - a_1) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

La factorisation est alors immédiate :

$$\begin{aligned}
 V(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_2^{n-1}(a_2 - a_1) \\ a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & a_3^{n-1}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) & a_n^{n-1}(a_n - a_1) \\ a_{n+1} - a_1 & a_{n+1}(a_{n+1} - a_1) & \dots & a_{n+1}^{n-2}(a_{n+1} - a_1) & a_{n+1}^{n-1}(a_{n+1} - a_1) \end{vmatrix} \\
 &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1)(a_{n+1} - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & \dots & a_3^{n-2} & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \\ 1 & a_{n+1} & \dots & a_{n+1}^{n-2} & a_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= \prod_{j=2}^{n+1} (a_j - a_1) \times V(a_2, \dots, a_n, a_{n+1})
 \end{aligned}$$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à $V(a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$ puisqu'il s'agit d'un déterminant de Vandermonde d'ordre n : $V(a_2, a_3, \dots, a_{n+1}) = \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i)$.

Finalement :

$$\begin{aligned}
 V(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) &= \prod_{j=2}^{n+1} (a_j - a_1) \times V(a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) \\
 &= \prod_{j=2}^{n+1} (a_j - a_1) \times \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i) \\
 &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i)
 \end{aligned}$$

L'égalité est ainsi établie au rang $n + 1$.

On a bien :

$$\boxed{V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)}$$

2^{ème} approche

On constate d'emblée que le déterminant est nul dès lors que $a_i = a_j$ pour deux indices différents (deux lignes sont alors identiques).

Posons alors :

$$f(x) = V(x, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

La fonction f est une fonction polynôme de degré $n-1$ s'annulant pour $x = a_2, x = a_3, \dots$ et $x = a_n$. On dispose donc des $n-1$ racines et il vient immédiatement :

$$f(x) = \alpha(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)$$

Où α est un coefficient à déterminer. Si on développe $V(x, a_2, \dots, a_n)$ suivant la première ligne, on constate que le coefficient de x^{n-1} est :

$$(-1)^{n-1} \times \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \times V(a_2, \dots, a_n)$$

Il s'agit simplement du coefficient α cherché.

On a donc, finalement : $f(x) = (-1)^{n-1} \times V(a_2, \dots, a_n) \times (x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)$.

Mais : $(-1)^{n-1} \times (x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n) = (a_2-x)(a_3-x)\dots(a_n-x)$.

Finalement :

$$\begin{aligned} f(x) &= V(x, a_2, \dots, a_n) \\ &= V(a_2, \dots, a_n) \times (a_2-x)(a_3-x)\dots(a_n-x) \end{aligned}$$

En choisissant $x = a_1$, on retrouve la relation :

$$\begin{aligned} V(a_1, a_2, \dots, a_n) &= V(a_2, \dots, a_n) \times (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1) \\ &= \prod_{j=2}^n (a_j - a_1) \times V(a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Résultat final

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$