

Calculer le déterminant d'ordre n suivant ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} \cos(i+j) \\ \cos(1+1) & \cos(1+2) & \cos(1+3) & \cdots & \cos(1+n) \\ \cos(2+1) & \cos(2+2) & \cos(2+3) & \cdots & \cos(2+n) \\ \cos(3+1) & \cos(3+2) & \cos(3+3) & \cdots & \cos(3+n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(n+1) & \cos(n+2) & \cos(n+3) & \cdots & \cos(n+n) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \cos 2 & \cos 3 & \cos 4 & \cdots & \cos(1+n) \\ \cos 3 & \cos 4 & \cos 5 & \cdots & \cos(2+n) \\ \cos 4 & \cos 5 & \cos 6 & \cdots & \cos(3+n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(n+1) & \cos(n+2) & \cos(n+3) & \cdots & \cos(2n) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Analyse

Quelques formules de trigonométrie et, surtout, un retour à la définition du déterminant de vecteurs et à sa caractéristique essentielle : la multilinéarité ...

Résolution

On a classiquement : $\cos(i+j) = \cos i \cos j - \sin i \sin j$.

Ainsi, la matrice colonne correspondant à la j ème colonne du déterminant s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \cos(1+j) \\ \cos(2+j) \\ \vdots \\ \cos(n+j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 1 \cos j - \sin 1 \sin j \\ \cos 2 \cos j - \sin 2 \sin j \\ \vdots \\ \cos n \cos j - \sin n \sin j \end{pmatrix} = \cos j \begin{pmatrix} \cos 1 \\ \cos 2 \\ \vdots \\ \cos n \end{pmatrix} - \sin j \begin{pmatrix} \sin 1 \\ \sin 2 \\ \vdots \\ \sin n \end{pmatrix}$$

Considérons alors les deux vecteurs $\vec{u}(\cos 1 \quad \cos 2 \quad \cdots \quad \cos n)$ et $\vec{v}(\sin 1 \quad \sin 2 \quad \cdots \quad \sin n)$.

D'après la remarque précédente, on a :

$$D_n = \det(\cos 1 \vec{u} - \sin 1 \vec{v}, \cos 2 \vec{u} - \sin 2 \vec{v}, \dots, \cos n \vec{u} - \sin n \vec{v})$$

Pour $n = 1$, on a $\vec{u}(\cos 1)$ et $\vec{v}(\sin 1)$. L'égalité précédente se réécrit alors :

$$D_1 = \det(\cos 1 \vec{u} - \sin 1 \vec{v}) = \det(\cos^2 1 - \sin^2 1) = \cos^2 1 - \sin^2 1$$

On a aussi, par définition de D_n : $D_1 = |\cos 2| = \cos 2 = \cos(1+1) = \cos^2 1 - \sin^2 1$.

Pour $n = 2$, on a $\vec{u}(\cos 1 \quad \cos 2)$ et $\vec{v}(\sin 1 \quad \sin 2)$. En tenant compte de la multilinéarité du déterminant, il vient alors :

$$\begin{aligned} D_2 &= \det(\cos 1 \vec{u} - \sin 1 \vec{v}, \cos 2 \vec{u} - \sin 2 \vec{v}) \\ &= \det(\cos 1 \vec{u}, \cos 2 \vec{u}) + \det(\cos 1 \vec{u}, -\sin 2 \vec{v}) \\ &\quad + \det(-\sin 1 \vec{v}, \cos 2 \vec{u}) + \det(-\sin 1 \vec{v}, -\sin 2 \vec{v}) \\ &= \cos 1 \cdot \cos 2 \cdot \det(\vec{u}, \vec{u}) - \cos 1 \cdot \sin 2 \cdot \det(\vec{u}, \vec{v}) \\ &\quad - \sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \det(\vec{v}, \vec{u}) + \sin 1 \cdot \sin 2 \cdot \det(\vec{v}, \vec{v}) \\ &= -\cos 1 \cdot \sin 2 \cdot \det(\vec{u}, \vec{v}) - \sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \det(\vec{v}, \vec{u}) \\ &= -\cos 1 \cdot \sin 2 \cdot \det(\vec{u}, \vec{v}) + \sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \det(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= (\sin 1 \cdot \cos 2 - \cos 1 \cdot \sin 2) \cdot \det(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \sin(1-2) \cdot \begin{vmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ \cos 2 & \sin 2 \end{vmatrix} \\ &= -\sin 1 \cdot (\cos 1 \cdot \sin 2 - \cos 2 \cdot \sin 1) \\ &= -\sin 1 \cdot \sin(2-1) \\ &= -\sin^2 1 \end{aligned}$$

Ici encore, on peut retrouver ce résultat en revenant à la définition de D_n :

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} \cos 2 & \cos 3 \\ \cos 3 & \cos 4 \end{vmatrix} \\ &= \cos 2 \cdot \cos 4 - \cos^2 3 \\ &= \cos(3-1) \cdot \cos(3+1) - \cos^2 3 \\ &= (\cos 3 \cdot \cos 1 + \sin 3 \cdot \sin 1) \cdot (\cos 3 \cdot \cos 1 - \sin 3 \cdot \sin 1) - \cos^2 3 \\ &= \cos^2 3 \cdot \cos^2 1 - \sin^2 3 \cdot \sin^2 1 - \cos^2 3 \\ &= \cos^2 3 \cdot (\cos^2 1 - 1) - \sin^2 3 \cdot \sin^2 1 \\ &= \cos^2 3 \cdot (-\sin^2 1) - \sin^2 3 \cdot \sin^2 1 \\ &= -\sin^2 1 \cdot (\cos^2 3 + \sin^2 3) \\ &= -\sin^2 1 \end{aligned}$$

Supposons cette fois $n \geq 3$.

En utilisant la multilinéarité du déterminant pour développer

$$D_n = \det(\cos 1.\vec{u} - \sin 1.\vec{v}, \cos 2.\vec{u} - \sin 2.\vec{v}, \dots, \cos n.\vec{u} - \sin n.\vec{v})$$

on va faire apparaître 2^n déterminants de la forme $\det(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ où $\vec{x}_i = \vec{u}$ ou \vec{v} . Comme $n \geq 3$, l'un des deux vecteurs \vec{u} ou \vec{v} apparaîtra au moins deux fois et chacun de ces 2^n déterminants sera nul. D'où : $D_n = 0$.

Résultat final

$$D_1 = \cos 2 = \cos^2 1 - \sin^2 1, \quad D_2 = -\sin^2 1$$

et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 : $D_n = 0$.