

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n .

On considère alors la matrice $A' = \left((-1)^{i+j} a_{ij} \right)$.

Comparer $\det A$ et $\det A'$.

Analyse

On peut conjecturer le résultat en effectuant quelques calculs sur des matrices d'ordres petits. Un « retour » à la définition du déterminant permet de démontrer rapidement le résultat.

Résolution

Nous pouvons, par exemple, essayer de conjecturer le résultat à partir de quelques matrices simples (ce n'est en rien une obligation !).

Pour une matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre 1, on a : $A' = \left((-1)^{1+1} a_{11} \right) = (a_{11}) = A$.

D'où, immédiatement : $\det A = \det A'$.

Pour une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ d'ordre 2, on a :

$$A' = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} a_{11} & (-1)^{1+2} a_{12} \\ (-1)^{2+1} a_{21} & (-1)^{2+2} a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

On a alors : $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ et :

$$\det A' = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - (-1)a_{12}(-1)a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$$

On a encore l'égalité des deux déterminants.

Ce résultat serait-il valable quelle que soit la dimension de la matrice A ?

Posons : $A' = (a'_{ij}) = \left((-1)^{i+j} a_{ij} \right)$.

En revenant à la définition du déterminant, on a :

$$\begin{aligned} \det A' &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a'_{\sigma(1)1} a'_{\sigma(2)2} \cdots a'_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sigma(1)+1} a_{\sigma(1)1} (-1)^{\sigma(2)+2} a_{\sigma(2)2} \cdots (-1)^{\sigma(n)+n} a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sigma(1)+\sigma(2)+\dots+\sigma(n)+1+2+\dots+n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \end{aligned}$$

Mais pour toute permutation σ de S_n , on a :

$$\sigma(1) + \sigma(2) + \dots + \sigma(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

On en déduit ainsi :

$$(-1)^{\sigma(1)+\sigma(2)+\dots+\sigma(n)+1+2+\dots+n} = (-1)^{2 \times \frac{n(n+1)}{2}} = (-1)^{n(n+1)}$$

Pour tout entier naturel n , le produit $n(n+1)$ est pair (l'un des deux entiers n ou $n+1$ est pair) et on a : $(-1)^{n(n+1)} = 1$.

On en déduit finalement :

$$\begin{aligned} \det A' &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sigma(1)+\sigma(2)+\dots+\sigma(n)+1+2+\dots+n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \det A \end{aligned}$$

Les déterminants des matrices A et A' sont égaux.

Résultat final

Pour toute matrice carrée d'ordre n $A = (a_{ij})$, on a :

$$\begin{aligned} \det A &= \det A' \\ \text{où } A' &= \left((-1)^{i+j} a_{ij} \right) \end{aligned}$$