Soit $\mathrm{A} = \left(a_{ij} \right)$ une matrice carrée d'ordre n.

On considère alors la matrice A' obtenue comme suit : pour tout entier naturel j compris entre 1 et n, la $j$ème colonne de A' est la somme des $n-1$ colonnes de A d'indices différents de j.

Comparer $\det \mathrm{A}$ et $\det \mathrm{A}'$.

Analyse

Ici encore, on a intérêt à « revenir aux fondamentaux » en adoptant une approche vectorielle du problème posé.

Résolution

Nous identifions les colonnes de la matrices A comme les coordonnées de n vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$.

Dans ces conditions, on a : $\det \mathrm{A} = \det\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\right)$.

Par construction de la matrice A', on a aussi :

$$\det \mathrm{A}' = \det\left(\vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4 + ... + \vec{u}_n, \vec{u}_1 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4 + ... + \vec{u}_n, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_4 + ... + \vec{u}_n, ..., \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + ... + \vec{u}_{n-1}\right)$$

Pour « y voir plus clair » et simplifier les calculs, nous introduisons le vecteur :

$$\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + ... + \vec{u}_n$$

Il vient alors : $\det \mathrm{A}' = \det\left(\vec{v} - \vec{u}_1, \vec{v} - \vec{u}_2, \vec{v} - \vec{u}_3, ..., \vec{v} - \vec{u}_n\right)$.

En utilisant la multilinéarité du déterminant, on développe $\det A'$ en ne conservant que les déterminants où $\vec{v}$ n'apparaît qu'au plus une seule fois :

$$\begin{aligned}\det A' &= \det\left(\vec{v}-\vec{u}_1, \vec{v}-\vec{u}_2, \vec{v}-\vec{u}_3, ..., \vec{v}-\vec{u}_n\right)\\ &= \underbrace{\det\left(-\vec{u}_1, -\vec{u}_2, -\vec{u}_3, ..., -\vec{u}_n\right)}_{\text{dans ce déterminant, } \vec{v} \text{ n'apparaît pas}}\\ &\qquad +\det\left(\vec{v}, -\vec{u}_2, -\vec{u}_3, ..., -\vec{u}_n\right)\\ &\qquad +\det\left(-\vec{u}_1, \vec{v}, -\vec{u}_3, ..., -\vec{u}_n\right)\\ &\qquad +\det\left(-\vec{u}_1, -\vec{u}_2, \vec{v}, ..., -\vec{u}_n\right)\\ &\qquad +...\\ &\qquad +\det\left(-\vec{u}_1, -\vec{u}_2, -\vec{u}_3, ..., \vec{v}\right)\end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned}\det\left(\vec{v}, -\vec{u}_2, -\vec{u}_3, ..., -\vec{u}_n\right) &= \det\left(\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3+...+\vec{u}_n, -\vec{u}_2, -\vec{u}_3, ..., -\vec{u}_n\right)\\ &= \det\left(\vec{u}_1, -\vec{u}_2, -\vec{u}_3, ..., -\vec{u}_n\right)\\ &= (-1)^{n-1}\det\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_n\right)\\ &= (-1)^{n-1}\det A\end{aligned}$$

En raisonnant de façon similaire, on aura aussi :

$$\det\left(-\vec{u}_1, \vec{v}, -\vec{u}_3, ..., -\vec{u}_n\right) = \det\left(-\vec{u}_1, -\vec{u}_2, \vec{v}, ..., -\vec{u}_n\right) = ... = \det\left(-\vec{u}_1, -\vec{u}_2, -\vec{u}_3, ..., \vec{v}\right) = (-1)^{n-1}\det A$$

Enfin, on a : $\det\left(-\vec{u}_1, -\vec{u}_2, -\vec{u}_3, ..., -\vec{u}_n\right) = (-1)^n \det\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_n\right) = (-1)^n \det A$.

En définitive :

$$\det A' = (-1)^n \det A + n\times(-1)^{n-1}\det A = (n-1)\times(-1)^{n-1}\det A$$

Résultat final

Pour toute matrice carrée d'ordre n $A = \left(a_{ij}\right)$, le déterminant de la matrice A' obtenue en remplaçant chaque colonne de A par la somme des $n-1$ autres colonnes est donné par :

$$\det A' = (n-1)\times(-1)^{n-1}\det A$$