Soit $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ $2n$ réels.

Calculer le déterminant :

$$d_n = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix}$$

Analyse

On peut calculer les premières valeurs de d_n, pour de petites valeurs de n. Mais une fois encore, dans le cas général, on a intérêt à « revenir aux fondamentaux » en adoptant une approche vectorielle du problème posé.

Résolution

Pour $n = 1$, on a immédiatement : $d_1 = |a_1 - b_1| = a_1 - b_1$ (Attention ! Ici, l'écriture « $|a_1 - b_1|$ » ne désigne pas la valeur absolue de $a_1 - b_1$!).

Pour $n = 2$, on a immédiatement :

$$\begin{aligned} d_2 &= \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 \end{vmatrix} \\ &= (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) - (a_1 - b_2)(a_2 - b_1) \\ &= -a_1 b_2 - b_1 a_2 + a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \end{aligned}$$

Pour $n \geq 3$, nous allons introduire les vecteurs $\vec{u}(a_1, a_2, ..., a_n)$ et $\vec{v}(-1, -1, ..., -1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Dans ces conditions, on a :

$$d_n = \det(\vec{u} + b_1\vec{v}, \vec{u} + b_2\vec{v}, ..., \vec{u} + b_n\vec{v})$$

En utilisant la multi-linéarité du déterminant, on va pouvoir écrire d_n sous la forme d'une somme de déterminants où, dans chacun d'eux, l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ apparaîtra au moins deux fois. Le déterminant étant une forme alternée, chacun des déterminants ainsi obtenu sera nul.

En définitive, on a aura : $d_n = 0$.

Résultat final

$d_1 = a_1 - b_1$, $d_2 = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$ et pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3 : $d_n = 0$.