Soit a, b et x trois réels.

Calculer le déterminant :

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \\ a & x & x & b \end{vmatrix}$$

Analyse

Ne nous précipitons pas ! On peut d'abord « jouer » avec les lignes et les colonnes pour, classiquement, faire apparaître des 0.

Résolution

$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \\ a & x & x & b \end{vmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & b-a & 0 \\ b-a & 0 & 0 & a-b \\ x & b & a & x \\ a & x & x & b \end{vmatrix}\begin{matrix} L_1-L_3 \\ L_2-L_4 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} = (a-b)^2 \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ x & b & a & x \\ a & x & x & b \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (a-b)^2 \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1+C_4 & C_2+C_3 & C_3 & C_4 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2x & a+b & a & x \\ a+b & 2x & x & b \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (a-b)^2 \left[2x \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x & x & b \end{vmatrix} - (a+b) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a+b & a & x \end{vmatrix} \right]$$

$$= (a-b)^2 \left[2x \times (-2x) - (a+b) \times \left(-(a+b) \right) \right]$$

$$= (a-b)^2 \left[(a+b)^2 - (2x)^2 \right]$$

$$= (a-b)^2 (a+b+2x)(a+b-2x)$$

Résultat final

$$\forall (a,b,x)\in\mathbb{R}^3,\ f(x)=\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \\ a & x & x & b \end{vmatrix}=(a-b)^2(a+b+2x)(a+b-2x)$$