Soit $\mathscr{P}$ une parabole et soit M un point de $\mathscr{P}$ distinct de son sommet.

1. Montrer qu'il existe un unique point P de $\mathscr{P}$ tel que les tangentes à $\mathscr{P}$ en M et P soient perpendiculaires.
2. Quel est le lieu décrit par le point d'intersection de ces tangentes lorsque le point M décrit $\mathscr{P}$ privée de son sommet ?

Analyse

Une jolie propriété géométrique de la parabole qui permet de jeter un regard nouveau sur la notion de directrice.
On peut adopter une approche analytique mais on peut également résoudre l'exercice sur la seule base d'arguments géométriques. C'est ce que nous proposons ici.

Résolution

Question 1.

Nous notons classiquement F le foyer de la parabole $\mathscr{P}$, S son sommet et $\mathscr{D}$ sa directrice.

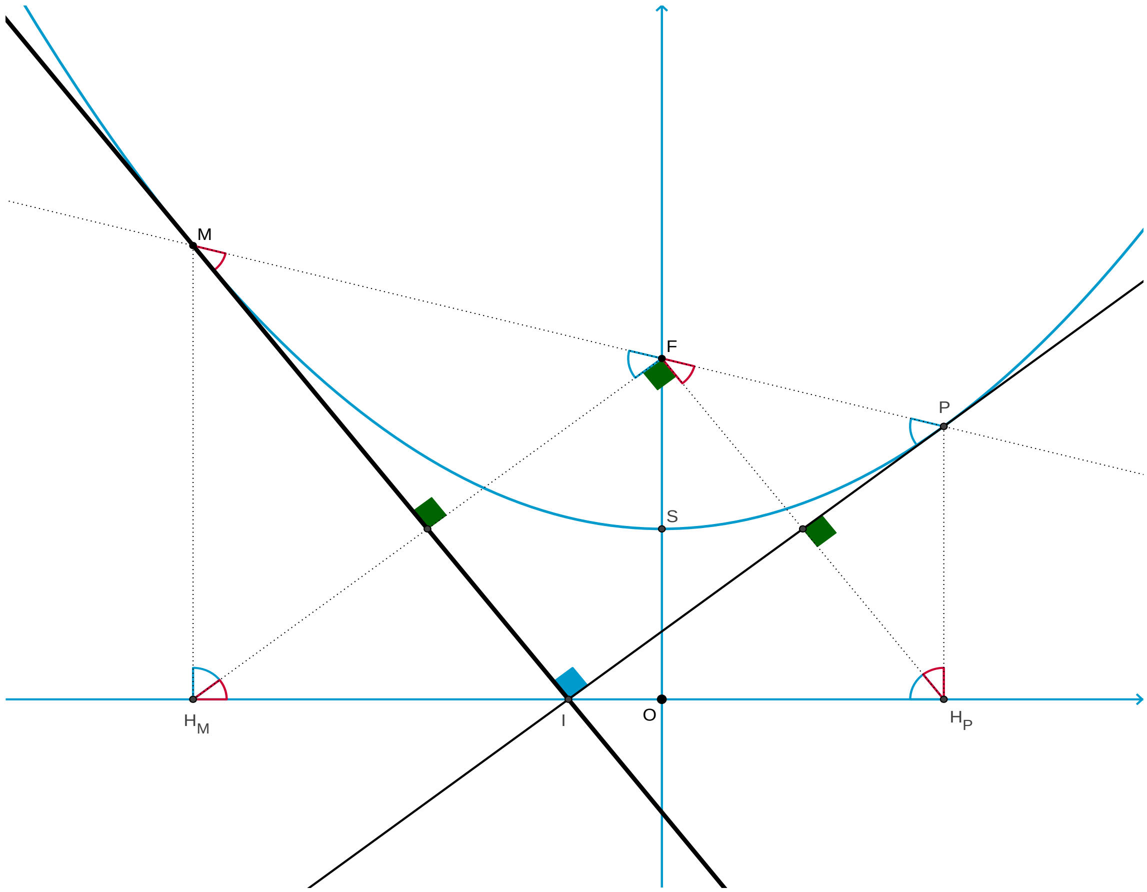
Nous notons $\mathrm{H_M}$ le projeté orthogonal du point M sur la directrice de la parabole $\mathscr{P}$.
Alors la tangente $\mathscr{T}_\mathrm{M}$ à $\mathscr{P}$ au point M est la médiatrice du segment $[\mathrm{FH_M}]$.

Nous cherchons un autre point P de la parabole $\mathscr{P}$ tel qu'en ce point la tangente $\mathscr{T}_\mathrm{P}$ soit perpendiculaire à $\mathscr{T}_\mathrm{M}$. Supposons que ce point existe. Les droites $(\mathrm{FH_M})$ et $(\mathrm{FH_P})$ sont donc perpendiculaires : le triangle $\mathrm{FH_MH_P}$ est ainsi rectangle en F.

On montre alors facilement que les angles $\widehat{\mathrm{MFH_M}}$ et $\widehat{\mathrm{PFH_P}}$ sont complémentaires puis que les points M, F et P sont alignés.

Réciproquement, pour tout point M de $\mathscr{P}$ différent du sommet S de la parabole, la droite (MF) coupe $\mathscr{P}$ en un autre point P et on montre facilement que les tangentes à $\mathscr{P}$ en M et P sont perpendiculaires.

La figure ci-après illustre la situation.



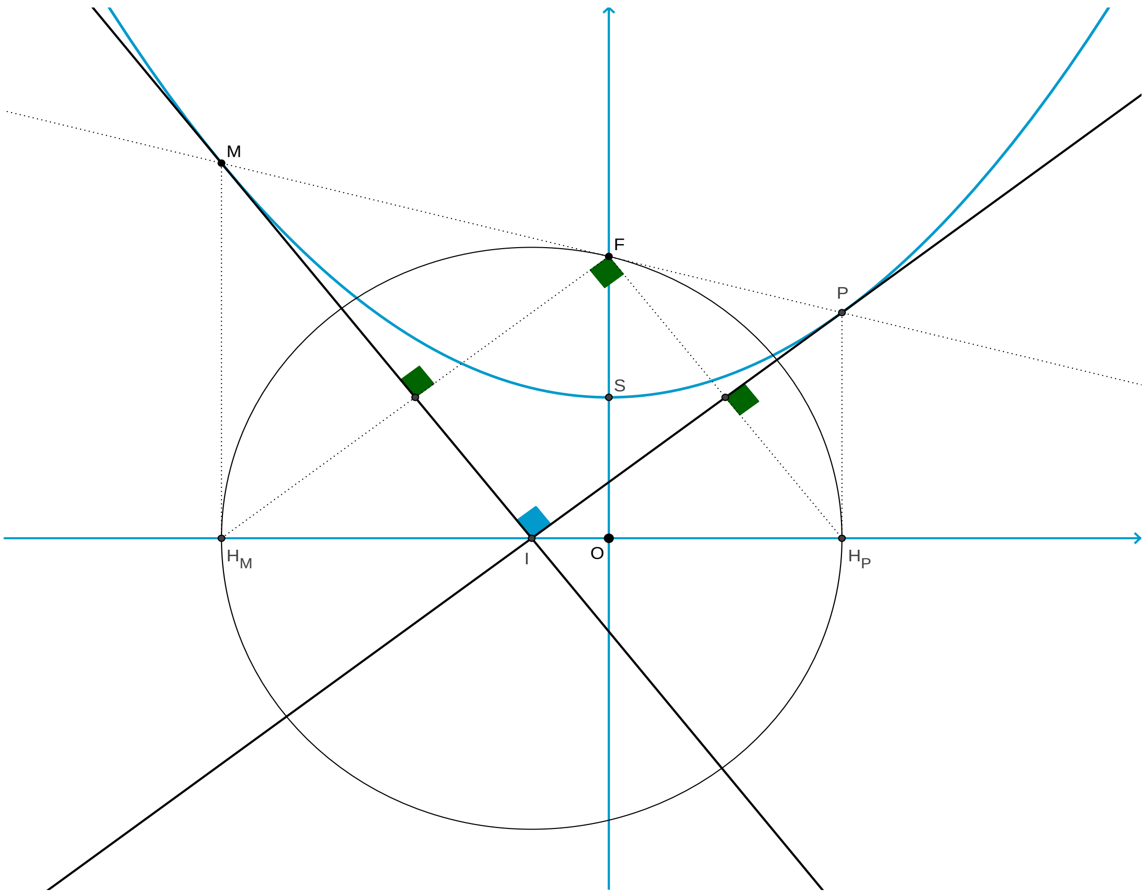
En guise de conclusion :

Pour tout point M, différent de son sommet, d'une parabole $\mathscr{P}$ de foyer F, il existe un unique point P tel que les tangentes à $\mathscr{P}$ an M et P soient perpendiculaires : il s'agit du deuxième point d'intersection de la droite (MF) et de la parabole $\mathscr{P}$.

Question 2.

En conservant les notations introduites dans la question précédente, nous notons maintenant I le point d'intersection des tangentes $\mathscr{T}_M$ et $\mathscr{T}_P$ à $\mathscr{P}$ en M et P respectivement.
Nous avons vu que les droites $\mathscr{T}_M$ et $\mathscr{T}_P$ étaient les médiatrices des segments $[FH_M]$ et $[FH_P]$ respectivement. Leur point d'intersection I est donc le centre du cercle circonscrit au triangle FH_MH_P. Mais celui-ci est rectangle en F. Ainsi, le point I est le milieu de son hypoténuse, c'est-à-dire le milieu du segment $[H_MH_P]$. Le point I appartient donc à la directrice de la parabole $\mathscr{P}$.

Réciproquement, pour un point quelconque I de la directrice $\mathscr{D}$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon IF (cf. la figure ci-après). Le cercle $\mathscr{C}$ coupe $\mathscr{D}$ en deux points H_M et H_P. Le triangle FH_MH_P est alors un triangle inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$, $[H_MH_P]$ étant un diamètre de ce cercle. Il est donc rectangle en I. Les médiatrices des segments $[FH_M]$ et $[FH_P]$ sont alors tangentes à la parabole $\mathscr{P}$ et elles sont perpendiculaires.



Finalement :

Le lieu des points d'intersection des couples de tangentes perpendiculaires à une parabole est sa directrice.