Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$.
Soit M un point de $\mathscr{E}$ n'appartenant pas à l'axe focal et $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{E}$ en M. $\mathscr{T}$ coupe $\mathscr{D}$ en T.

Montrer que le triangle MFT est rectangle.

Analyse

Un autre résultat classique relatif à l'ellipse que l'on peut rapidement établir en travaillant avec les coordonnées cartésiennes.

Résolution

Soit $\mathrm{M}\left(x_0\,;y_0\right)$ un point de $\mathscr{E}$ et soit classiquement le repère orthonormé tel que l'équation cartésienne de $\mathscr{E}$ soit :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

La tangente à $\mathscr{E}$ en $\mathrm{M}\left(x_0\,;y_0\right)$ admet alors pour équation :

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$$

On peut considérer $\mathrm{F}\left(-c\,;0\right)$ associé à la directrice $\mathscr{D}$ d'équation $x=-\frac{a^2}{c}$. On dispose ainsi directement de l'abscisse du point T.
Son ordonnée est alors obtenue en remplaçant x par $-\frac{a^2}{c}$ dans l'équation $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$:

$$\frac{x_0}{a^2}\times\left(-\frac{a^2}{c}\right)+\frac{y_0}{b^2}y=1$$

Soit : $-\frac{x_0}{c}+\frac{y_0}{b^2}y=1\Leftrightarrow y=\frac{b^2}{y_0}\left(1+\frac{x_0}{c}\right)$.

On a donc : $\mathrm{T}\left(-\frac{a^2}{c}\,;\frac{b^2}{y_0}\left(1+\frac{x_0}{c}\right)\right)$ puis : $\overrightarrow{\mathrm{FT}}\left(-\frac{a^2}{c}+c\,;\frac{b^2}{y_0}\left(1+\frac{x_0}{c}\right)\right)$.

Or $\overrightarrow{\mathrm{FM}}\left(x_0+c\,;y_0\right)$.

Il vient donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{FT}}.\overrightarrow{\mathrm{FM}} &= \left(-\frac{a^2}{c}+c\right)\times\left(x_0+c\right)+\frac{b^2}{y_0}\left(1+\frac{x_0}{c}\right)\times y_0\\ &= \left(-\frac{a^2}{c}+c\right)x_0+\left(-a^2+c^2\right)+b^2+b^2\,\frac{x_0}{c}\\ &= \frac{1}{c}\left(-a^2+c^2+b^2\right)x_0+\left(-a^2+c^2+b^2\right)\\ &= \left(-a^2+c^2+b^2\right)\times\left(\frac{x_0}{c}+1\right)\end{aligned}$$

Or, pour l'ellipse, on a classiquement : $c^2=a^2-b^2$. On en déduit : $\overrightarrow{\mathrm{FT}}.\overrightarrow{\mathrm{FM}}=0$.
Les droites (FT) et (FM) sont donc perpendiculaires : le triangle MFT est rectangle en F.

Remarque : on obtiendra exactement le même résultat en raisonnant avec le foyer $\mathrm{F}'(c\,;0)$ de directrice associée $\mathscr{D}':x=\frac{a^2}{c}$ (cf. la figure ci-dessous.