Soit (f_n) une suite de fonctions réelles de la variable réelle continues, d'un intervalle $[a;b]$ dans un intervalle $[c;d]$.
Soit (g_n) une suite de fonctions réelles de la variable réelle continues, de l'intervalle $[c;d]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que les suites (f_n) et (g_n) convergent uniformément vers les fonctions f et g respectivement.

Montrer que la suite $(g_n \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$.

Analyse

En partant de $\left|(g_n \circ f_n)(x)-(g \circ f)(x)\right|$, on est classiquement amené à effectuer un découpage en vue de la majoration. Si l'on doit exploiter la convergence uniforme des suites (f_n) et (g_n), on se rend vite compte que le fait que ces fonctions soient définies sur des segments est une donnée fondamentale …

Résolution

Remarquons dans un premier temps que les fonctions f et g sont continues comme limites uniformes de suites de fonctions continues. Etant continues sur des segments ($[a;b]$ et $[c;d]$), elles y sont uniformément continues.

Soit ε un réel strictement positif.

Pour tout x réel dans l'intervalle $[a;b]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|(g_n \circ f_n)(x)-(g \circ f)(x)\right| &= \left|g_n\left(f_n(x)\right)-g\left(f(x)\right)\right| \\
&= \left|\left[g_n\left(f_n(x)\right)-g\left(f_n(x)\right)\right]+\left[g\left(f_n(x)\right)-g\left(f(x)\right)\right]\right| \\
&\leq \left|g_n\left(f_n(x)\right)-g\left(f_n(x)\right)\right|+\left|g\left(f_n(x)\right)-g\left(f(x)\right)\right|
\end{aligned}$$

→ Le terme : $\left|g_n\left(f_n(x)\right)-g\left(f_n(x)\right)\right|$

Puisque la suite (g_n) converge uniformément vers la fonction *g*, il existe un entier naturel n_1 tel que pour tout *y* dans l'intervalle $[c\,;d]$ et pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à n_1, on a : $\left|g_n(y)-g(y)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$. Avec $y=f_n(x)$, on obtient : $\left|g_n\left(f_n(x)\right)-g\left(f_n(x)\right)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$.

→ Le terme : $\left|g\left(f_n(x)\right)-g\left(f(x)\right)\right|$

Comme la fonction *g* est uniformément continue : pour $\frac{\varepsilon}{2}>0$, il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout *x* et *y* de l'intervalle $[c\,;d]$, on a : $|x-y|\le\alpha\Rightarrow\left|g(x)-g(y)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$.
Mais puisque la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction *f*, il existe un entier naturel n_2 tel que pour tout *x* dans l'intervalle $[a\,;b]$ et pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à n_2, on a : $\left|f_n(x)-f(x)\right|\le\alpha$. On en déduit alors :

$$\forall x\in[a\,;b],\, n\ge n_2\Rightarrow\left|f_n(x)-f(x)\right|\le\alpha\Rightarrow\left|g\left(f_n(x)\right)-g\left(f(x)\right)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$$

En définitive, pour tout réel *x* de l'intervalle $[a\,;b]$ et pour tout entier naturel n supérieur à $N=\sup(n_1,n_2)$:

$$\left|(g_n\circ f_n)(x)-(g\circ f)(x)\right|\le\left|g_n\left(f_n(x)\right)-g\left(f_n(x)\right)\right|+\left|g\left(f_n(x)\right)-g\left(f(x)\right)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

On a ainsi établi :

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}\,/\,\forall x\in[a\,;b],\, n\ge N\Rightarrow\left|(g_n\circ f_n)(x)-(g\circ f)(x)\right|\le\varepsilon$$

La suite $(g_n\circ f_n)$ converge bien uniformément vers la fonction $g\circ f$ sur l'intervalle $[a\,;b]$.