

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de la fonction f .
2. Etudier la dérivabilité de la fonction f .

Analyse

Un exercice classique où l'on s'intéresse, dans un premier temps, à la convergence simple de la série de fonctions. Dans la question 2, on s'intéresse à la série des fonctions dérivées et on en établit facilement la convergence normale sur tout compact de \mathcal{D}_f .

Résolution

Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose : $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

Question 1.

Dans cette question, on étudie la convergence simple de la série $\sum f_n$.

Pour x fixé, la série $\sum f_n(x)$ est une série de Riemann. Elle converge pour tout réel x strictement supérieur à 1. On a donc immédiatement :

$$\mathcal{D}_f =]1; +\infty[$$

Question 2.

- Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et tout réel x strictement supérieur à 1, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} = n^{-x} = e^{-x \ln n}$$

La fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D}_f et pour tout réel x de \mathcal{D}_f , on a :

$$f_n'(x) = -\ln n \times e^{-x \ln n} = -\ln n \times f_n(x)$$

- Nous avons vu à la question précédente que la série $\sum f_n$ convergeait simplement sur \mathcal{D}_f .
- Intéressons-nous enfin à la convergence uniforme de la série $\sum f_n'$ sur un compact quelconque de \mathcal{D}_f . Plus précisément, nous considérons un segment $[a; b]$ inclus dans \mathcal{D}_f ($1 < a \leq b$) et étudions la convergence uniforme de $\sum f_n'$ sur ce segment.

On a facilement, pour tout x réel de \mathcal{D}_f : $f_n''(x) = -\ln n \times f_n'(x) = (\ln n)^2 \times f_n(x) > 0$.
La fonction f_n' est donc strictement croissante sur \mathcal{D}_f et donc sur le segment $[a; b]$.
Comme elle prend des valeurs strictement négatives, il vient immédiatement :

$$\|f_n'\|_\infty = |f_n'(a)| = \ln n \times f_n(a) = \frac{\ln n}{n^a}$$

Comme le réel a est strictement supérieur à 1, la série $\sum \|f_n'\|_\infty = \sum \frac{\ln n}{n^a}$ est une série de Bertrand convergente. Ainsi, la série $\sum f_n'$ est normalement, et donc uniformément, convergente sur le segment $[a; b]$.

Des trois éléments précédents, on déduit que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D}_f et que pour tout x strictement supérieur à 1, on a : $f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}$.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D}_f et pour tout x strictement supérieur à 1, on a :

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}$$