On considère :

$$f : x \mapsto \int_0^1 t^{xt} dt$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction *f*.
2. Donner un développement en série de la fonction *f*.

Analyse

L'expression « t^{xt} » se récrit sous forme exponentielle (question 1) et donne ainsi l'idée de base du développement en série. Le résultat de la question 2 se construit alors en deux temps : une inversion « série-intégrale » puis le calcul d'une intégrale.

Résolution

Question 1.

Pour tout réel *x* et tout réel *t* strictement positif, on a : $t^{xt} = e^{xt\ln t}$. Seule la borne « 0 » pose donc potentiellement problème.
En tenant compte de $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} t\ln t = 0$, il vient pour tout réel *x* : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} xt\ln t = 0$ puis, par composition : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} t^{xt} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{xt\ln t} = e^0 = 1$. Pour tout *x* réel, on peut donc prolonger la fonction $t \mapsto xt\ln t$ par continuité en 0.
Finalement :

La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$.

Question 2.

Pour tout *x* réel, on a :

$$t^{xt} = e^{xt\ln t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xt\ln t)^n}{n!}$$

On a donc : $f(x) = \int_0^1 t^{xt} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xt\ln t)^n}{n!} dt$.

On peut alors se demander si une inversion « série-intégrale » est envisageable.

Posons : $e^{xt\ln t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(xt\ln t)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)$ où : $u_n(t)=\frac{(xt\ln t)^n}{n!}$.

On peut s'intéresser à la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$, soit à la série numérique : $\sum\|u_n\|_\infty$.

Pour x réel fixé, on a :

$$\|u_n\|_\infty=\sup_{[0;1]}\left|\frac{(xt\ln t)^n}{n!}\right|=\frac{1}{n!}\sup_{[0;1]}\left|x^n(t\ln t)^n\right|=\frac{|x|^n}{n!}\sup_{[0;1]}\left|(t\ln t)^n\right|=\frac{|x|^n}{n!}\sup_{[0;1]}\left(|t\ln t|^n\right).$$

Considérons alors la fonction φ définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$\varphi:t\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } t=0\\ t\ln t & \text{si } t\in\left]0;1\right]\end{cases}$$

La fonction φ est continue sur l'intervalle $\left]0;1\right]$ comme produit de deux fonctions continues sur cet intervalle. Par ailleurs, on a : $\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\varphi(t)=\varphi(0)=0$. La fonction φ est donc continue en 0. Finalement, La fonction φ est continue sur l'intervalle $[0;1]$.

La fonction φ est dérivable sur l'intervalle $\left]0;1\right]$ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout réel t dans $\left]0;1\right]$, on a : $\varphi'(t)=1\times\ln t+t\times\frac{1}{t}=\ln t+1$.

On en tire : $\varphi'(t)<0\Leftrightarrow\ln t+1<0\Leftrightarrow\ln t<-1\Leftrightarrow t<\frac{1}{e}$ et $\varphi'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{e}$.

La fonction φ est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{e}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e};1\right]$. Elle admet donc un minimum pour $t=\frac{1}{e}$ et $\varphi\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\times\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$.

Comme $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, on en déduit finalement $\sup_{[0;1]}|\varphi(t)|=\frac{1}{e}$, puis, la fonction $t\mapsto t^n$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: $\|u_n\|_\infty=\frac{|x|^n}{n!}\sup_{[0;1]}\left(|\varphi(t)|^n\right)=\frac{|x|^n}{n!}\left(\frac{1}{e}\right)^n=\frac{1}{n!}\left(\frac{|x|}{e}\right)^n$.

On doit donc étudier la série numérique : $\sum\frac{1}{n!}\left(\frac{|x|}{e}\right)^n$.

La convergence est immédiate pour $x=0$. On suppose donc $x\neq0$.

On a, pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{|x|}{e}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{|x|}{e}\right)^{n}}=\frac{1}{n+1}\times\frac{|x|}{e}$$

On a alors immédiatement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\times\dfrac{|x|}{e}\right)=0$ et la règle de D'Alembert nous permet de conclure que la série $\sum\|u_n\|_\infty=\sum\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{|x|}{e}\right)^n$ est convergente.

En définitive, pour tout x réel, la série $\sum u_n$ est normalement (et donc uniformément) convergente. L'inversion « série-intégrale » peut être opérée et il vient :

$$f(x)=\int_0^1 t^{xt}dt=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(xt\ln t)^n}{n!}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{(xt\ln t)^n}{n!}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\int_0^1(t\ln t)^n\,dt$$

Posons alors : $I_n=\int_0^1(t\ln t)^n\,dt$.

On a immédiatement $I_0=1$ et pour tout entier naturel n non nul, on a, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^1(t\ln t)^n\,dt=\int_0^1\underbrace{t^n}_{f'(t)}\underbrace{(\ln t)^n}_{g(t)}dt=\underbrace{\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}(\ln t)^n\right]_0^1}_{0}-\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-1}dt\\
&=-\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-1}dt=\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-2}dt=\ldots=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^n}\int_0^1 t^n dt\\
&=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^n}\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1\\
&=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\int_0^1(t\ln t)^n\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\times(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^1 t^{xt}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{(n+1)^{n+1}}}$$