On considère la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ f_n(x) = n\cos^n(x)\sin(x)$$

1. Déterminer la limite simple, f, de la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Etudier la convergence uniforme de la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Comparer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt$.

Analyse

Un exercice qui permet de mettre en œuvre des méthodes classiques (beaucoup de calculs de limites). On montre ici qu'il n'y a pas convergence uniforme et on constate à la dernière question que l'inversion limite-intégrale est impossible.

Résolution

Question 1.

Comme $\sin 0 = 0$, il vient : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f_n(0) = 0$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

Par ailleurs, on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \cos^n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, d'où : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Supposons maintenant : $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout x réel dans $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\sin(x) > 0$ et $\cos(x) > 0$, d'où $\forall n\in\mathbb{N}^*, \cos^n(x) > 0$.

Soit alors x fixé dans cet intervalle.

Pour tout n entier naturel non nul, on a :

$$\begin{aligned}\ln f_n(x) &= \ln\left[n\cos^n(x)\sin(x)\right]\\ &= \ln n + n\ln(\cos(x)) + \ln(\sin(x))\\ &= n\left[\frac{\ln n}{n} + \ln(\cos(x)) + \frac{\ln(\sin(x))}{n}\right]\end{aligned}$$

On a classiquement (croissance comparée) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n} = 0$.

Par ailleurs : $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos(x) < 1 \Leftrightarrow \ln(\cos(x)) < 0$.

Enfin, $\ln(\sin(x))$ est fixé et on a immédiatement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(\sin(x))}{n} = 0$.

On tire de ce qui précède : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{\ln n}{n} + \ln(\cos(x)) + \dfrac{\ln(\sin(x))}{n}\right] = \ln(\cos(x)) < 0$ puis :

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{n\left[\frac{\ln n}{n} + \ln(\cos(x)) + \frac{\ln(\sin(x))}{n}\right]\right\} = \lim_{n\to+\infty}\ln f_n(x) = -\infty$$

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

En définitive, on a : $\forall x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right],\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle : $f = 0$.

Question 2.

On s'intéresse ici à la limite de : $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]}|f_n(x)| = \sup\limits_{x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]} f_n(x)$.

Pour tout entier naturel n non nul et tout réel x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\begin{aligned}f_n'(x) &= n\left[-n\sin^2(x)\cos^{n-1}(x) + \cos^{n+1}(x)\right]\\ &= n\cos^{n-1}(x)\left[-n\sin^2(x) + \cos^2(x)\right]\end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$, la fonction f_n' s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$ et en x_0 tel que $-n\sin^2(x_0) + \cos^2(x_0) = 0$, soit $\tan^2(x_0) = \dfrac{1}{n}$ (x_0 existe puisque tan réalise une bijection de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}_+$).

On a alors :

- $f_n'(x) > 0$ sur $]0\,;x_0[$.
- $f_n'(x) < 0$ sur $\left]x_0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;x_0]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[x_0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

On a donc : $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]} f_n(x) = f_n(x_0)$.

On a :

$$f_n(x_0) = n\cos^n(x_0)\sin(x_0) = n\cos^{n+1}(x_0)\tan(x_0) = \frac{n}{\sqrt{n}}\cos^{n+1}(x_0) = \sqrt{n}\left[\cos^2(x_0)\right]^{\frac{n+1}{2}}$$

Or : $\cos^2(x_0) = \dfrac{1}{1+\tan^2(x_0)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$.

Donc : $\left[\cos^2(x_0)\right]^{\frac{n+1}{2}} = \left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}}$.

Comme : $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, il vient : $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Finalement : $\lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left[\cos^2(x_0)\right]^{\frac{n+1}{2}} = +\infty$.

Il n'y a donc pas convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la fonction nulle.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.

Question 3.

Puisque *f* est la fonction nulle, on a immédiatement : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt = 0$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin(t)\,dt\\ &= n\left[-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= -\frac{n}{n+1}\left(\cos^{n+1}\frac{\pi}{2}-\cos^{n+1}0\right)\\ &= \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

Il vient alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt \neq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$.

On ne peut procéder à l'inversion limite-intégrale.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt \neq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)(t)\,dt}$$