On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

1. Etablir l'existence et la continuité de *f* sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Pour tout *x* de $\mathbb{R}_+^*$, exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

Analyse

Un exercice qui permet la mise en œuvre de méthodes classiques. L'existence de *f*, i.e. sa convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$, ne pose pas de difficulté particulière. Sur sa continuité, on doit bien sûr penser à la convergence uniforme, mode de convergence qui découle, éventuellement, d'un autre mode de convergence très puissant. Pour la question 2, on manipule fondamentalement des séries convergentes.

Résolution

Question 1.

Pour tout entier naturel *n* et tout réel *x* strictement positif, nous posons :

$$f_n(x)=\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

Soit *x* un réel strictement positif fixé.
On s'intéresse à la série à termes positifs $\sum f_n(x)$.

Soit *n* un entier naturel.
Pour tout entier naturel *k* dans $[\![0\,;n]\!]$, on a $x+k>k$.
On en tire : $x(x+1)(x+2)\dots(x+n)\geq x\times 1\times 2\times\dots\times n=x\times n!$ puis :

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}\leq\frac{1}{x\times n!}$$

Or, la série de terme général $\dfrac{1}{x\times n!}$ est convergente vers $\dfrac{e}{x}$.

On en déduit immédiatement que la série $\sum \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}$ converge.

La fonction *f* est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Considérons maintenant un segment $[a\,;b]$ $(0<a<b)$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Soit *n* un entier naturel fixé.

Pour tout réel *x* de $[a\,;b]$ et tout entier naturel *k* dans $[\![0\,;n]\!]$, on a : $x+k>a+k$ et donc :

$$\forall x\in[a\,;b],\ f_n(x)=\frac{1}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}\leq f_n(a)=\frac{1}{a(a+1)(a+2)...(a+n)}\leq\frac{1}{a\times n!}$$

On en tire : $\|f_n\|_\infty\leq\dfrac{1}{a\times n!}$.

Comme $\sum\dfrac{1}{a\times n!}$ est convergente (de limite $\dfrac{e}{a}$), on en déduit que $\sum f_n$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a\,;b]$. Elle y est donc uniformément convergente.

Finalement, $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$.

Comme les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonctions rationnelles, on en déduit finalement que *f* est également continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction *f* est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question 2.

Pour tout *x* réel strictement positif, on a :

$$\begin{aligned}
f(x+1)&=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)...(x+n+1)}\\
&=x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)(x+2)...(x+n+1)}=x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}\\
&=x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}-\frac{1}{x}\right)=x\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)\\
&=x\,f(x)-1
\end{aligned}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x+1)=x\,f(x)-1$$

Question 3.

D'après la question précédente, on a, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$: $x\,f(x) = 1 + f(x+1)$.

De la continuité de f on tire alors : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left[x\,f(x) \right] = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x+1) = f(1)$.

Or : $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 \times (1+1) \times \ldots \times (1+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$.

Alors : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left[x\,f(x) \right] = 1 + e - 1 = e$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)}{\frac{x}{e}} = 1$.

Soit, finalement : $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{e}{x}$.

$$\boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{e}{x}}$$