Soit $\left(f_n\right)$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ et soit g une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer que la suite $\left(g \circ f_n\right)$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur $\mathbb{R}$.

Analyse

On traduit les deux hypothèses à l'aide des définitions du cours. On les combine pour obtenir rapidement le résultat.

Résolution

On veut montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left|\left(g \circ f_n\right)(x) - \left(g \circ f\right)(x)\right| \leq \varepsilon$$

Soit donc ε un réel strictement positif.

La continuité uniforme de g nous permet alors d'écrire :

$$\exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq \alpha \Rightarrow \left|g(x) - g(y)\right| \leq \varepsilon$$

D'après la convergence uniforme de la suite $\left(f_n\right)$ vers la fonction f, pour ce réel α, il existe un entier naturel $n(\alpha)$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, n \geq n(\alpha) \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \alpha$.

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, n \geq n(\alpha) \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \alpha \Rightarrow \left|\left(g \circ f_n\right)(x) - \left(g \circ f\right)(x)\right| \leq \varepsilon$$

Le résultat est ainsi établi.

Résultat final

Si la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f et **si** la fonction g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ **alors** la suite $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers la fonction $g \circ f$ sur $\mathbb{R}$.