

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur \mathbb{R}_+ par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur \mathbb{R}_+ .
2. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur \mathbb{R}_+ puis sur $[\alpha; +\infty[$ (où $\alpha > 0$).

Analyse

Un exercice d'application du cours permettant de mettre en œuvre les notions/techniques fondamentales autour de la convergence des suites de fonctions.

Résolution

Question 1.

Notons d'abord que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(0) = 0$.

Soit alors x un réel strictement positif.

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{n^2x^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx} = 0.$$

Finalement :

La suite (f_n) converge vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+ .

Question 2.

Pour l'étude de la convergence uniforme de la suite (f_n) sur \mathbb{R}_+ , nous recherchons, pour tout n entier naturel non nul (pour $n = 0$, on a affaire à la fonction nulle), $\|f_n\|_\infty$.

La fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R}_+ comme fonction rationnelle définie sur cet intervalle et on a, pour tout x réel positif :

$$f_n'(x) = \frac{n \times (1+n^2x^2) - nx \times 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = n \times \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = n \times \frac{(1+nx) \times (1-nx)}{(1+n^2x^2)^2}$$

Comme $1 + nx \geq 1 > 0$, on en déduit immédiatement que le signe de $f_n'(x)$ est identique à celui de $1 - nx$:

- Pour tout x réel dans $\left[0; \frac{1}{n}\right[$, on a : $1 - nx > 0$.
- Pour tout x réel dans $\left]\frac{1}{n}; +\infty\right[$, on a $1 - nx < 0$.

La fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{n}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{n}; +\infty\right[$. Elle atteint donc son maximum en $\frac{1}{n}$ et la valeur de ce maximum

$$\text{est : } f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n \times \frac{1}{n}}{1 + n^2 \times \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Enfin, on a : $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx}{1 + n^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx}{n^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx} = 0$.

On en déduit finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2}$.

La suite $(\|f_n\|_\infty)$ ne converge donc pas vers 0 et finalement :

La suite (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+ .

L'étude précédente nous conduit à étudier la convergence de la suite (f_n) sur un intervalle de la forme $[\alpha; +\infty[$ puisque, pour n suffisamment grand, on aura $\frac{1}{n} < \alpha$.

Ainsi, pour $n > \frac{1}{\alpha}$, c'est-à-dire $n \geq \text{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1$, on aura f_n strictement décroissante et

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n\alpha}{1 + n^2\alpha^2}.$$

Il vient alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\alpha}{1 + n^2\alpha^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\alpha}{n^2\alpha^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\alpha} = 0$.

On en conclut :

La suite (f_n) ne converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle de la forme $[\alpha; +\infty[$ ($\alpha > 0$).