

1. Pour tout entier naturel n , calculer $\int_0^1 x^n \ln(x) dx$.

2. Montrer que $\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

(Ecole Polytechnique – ENS Cachan – PSI – 2016)

Analyse

La première question permet de cerner la démarche conduisant à l'égalité demandée dans la deuxième question.

Résolution

Question 1.

Commençons par traiter le cas particulier, classique, $n = 0$.

On s'intéresse donc à : $\int_0^1 \ln(x) dx$.

Comme primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0; 1]$, on a la fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$ qui admet une limite finie (nulle) en 0. Il vient donc :

$$\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ A > 0}} [x \ln(x) - x]_A^1 = \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ A > 0}} \{1 \times \ln(1) - 1 - [A \times \ln(A) - A]\} = -1$$

Soit :

$$\int_0^1 \ln(x) dx = -1$$

Supposons maintenant $n \geq 1$.

Dans ce cas, l'intégrale ne pose pas de problème de convergence car on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$.

Procédons alors à une intégration par partie en posant :

$$u(x) = \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$
$$v'(x) = x^n \Leftarrow v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n \ln(x) dx &= \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1} x^{n+1} \times \frac{1}{x} dx \\ &= 0 - 0 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n dx \\ &= -\frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

On constate que pour $n=0$, on a : $-\frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{1}{1^2} = -1 = \int_0^1 \ln(x) dx$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^n \ln(x) dx = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

Question 2.

Commençons par établir l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx$.

On a : $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ et donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) \ln(1-x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [-x \ln(x)] = 0$.

En posant $\theta = 1-x$, on a par ailleurs : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \ln(x) \ln(1-x) = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta > 0}} [\ln(\theta) \ln(1-\theta)] = 0$.

L'intégrale est bien convergente.

Pour tout réel x dans l'intervalle $]0;1[$, on a : $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ puis : $\frac{-1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et enfin, en

tenant compte de $\ln(1-x) = 0$ pour $x=0$: $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$.

On peut alors écrire :

$$\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx = -\int_0^1 \ln(x) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right) dx = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \ln(x) x^n dx$$

Peut-on inverser intégrale et somme ?

Pour étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum \frac{1}{n} \ln(x) x^n$, nous pouvons en étudier la convergence normale.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $]0;1[$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(x) x^n$.

Elle y est dérivable et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; 1], f_n'(x) = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{x} \times x^n + \ln(x) \times n x^{n-1} \right] = \frac{1}{n} (1 + n \ln(x)) x^{n-1}$$

La dérivée de f_n est donc du signe de $1 + n \ln(x)$. On a : $1 + n \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{n}}$.

Il vient alors :

- Si $x \in \left] 0; e^{-\frac{1}{n}} \right[$, $1 + n \ln(x) > 0$.
- Si $x \in \left] e^{-\frac{1}{n}}; 1 \right]$, $1 + n \ln(x) < 0$.

Ainsi, la fonction f_n admet un minimum global sur $]0; 1]$ en $e^{-\frac{1}{n}}$ qui vaut :

$$f_n \left(e^{-\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \ln \left(e^{-\frac{1}{n}} \right) \times \left(e^{-\frac{1}{n}} \right)^n = -\frac{1}{e \times n^2}$$

Enfin : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x) = f_n(1) = 0$.

On déduit immédiatement de ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty = \frac{1}{e \times n^2}$.

Or, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann convergente). Il en va donc de même

pour la série $\sum \frac{1}{e \times n^2} = \sum \|f_n\|_\infty$.

La série de fonctions $\sum f_n = \sum \frac{1}{n} \ln(x) x^n$ est ainsi normalement convergente. Elle est donc uniformément convergente sur $[0; 1]$ et on a alors :

$$\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \ln(x) x^n dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(x) x^n dx$$

En tenant compte du résultat de la première question :

$$\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(x) x^n dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{1}{(n+1)^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$$

On a bien obtenu l'égalité cherchée.

$$\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$$