Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum \frac{n^n}{n!} z^n$$

Analyse

Les coefficients ne posent pas de problème d'existence particulier. Leur forme suggère d'utiliser la règle de d'Alembert.

Résolution

Pour tout entier naturel n, posons : $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

On a alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{n+1^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \frac{n+1^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \frac{n+1^{n+1}}{n^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n+1^{n+1}}{n^n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{n+1^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

On a la limite classique : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

On en déduit alors, d'après la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence de la série entière est égal à $\dfrac{1}{e}$.

Résultat final

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{n^n}{n!} z^n$ est égal à $\dfrac{1}{e}$.