

Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum \frac{\operatorname{sh}n}{\operatorname{ch}^2n} z^n$$

## Analyse

Les coefficients ne posent pas de problème d'existence particulier (le cosinus hyperbolique au dénominateur ne s'annule pas). Leur forme suggère d'utiliser la règle de d'Alembert.

## Résolution

Pour tout entier naturel  $n$ , posons :  $u_n = \frac{\operatorname{sh}n}{\operatorname{ch}^2n}$ .

On a alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{\operatorname{sh}(n+1)}{\operatorname{ch}^2(n+1)}}{\frac{\operatorname{sh}n}{\operatorname{ch}^2n}} = \frac{\frac{\operatorname{th}(n+1)}{\operatorname{ch}(n+1)}}{\frac{\operatorname{th}n}{\operatorname{ch}n}} = \frac{\operatorname{th}(n+1)}{\operatorname{th}n} \times \frac{\operatorname{ch}n}{\operatorname{ch}(n+1)}$$

On a la limite classique :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th}x = 1$ . On a donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{th}n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(n+1) = 1$ .

Par ailleurs, on a l'équivalence :  $\operatorname{ch}x \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^x$ .

On en déduit :  $\frac{\operatorname{ch}n}{\operatorname{ch}(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2} e^n}{\frac{1}{2} e^{n+1}} = \frac{1}{e}$ .

D'où :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch}n}{\operatorname{ch}(n+1)} = \frac{1}{e}$ .

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}.$$

On en déduit alors, d'après la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence de la série entière est égal à  $e$ .

---

## Résultat final

Le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{\operatorname{sh}n}{\operatorname{ch}^2n} z^n$  est égal à  $e$ .