

On suppose que les séries entières $\sum a_{2n+1}z^{2n+1}$ et $\sum a_{2n}z^{2n}$ admettent pour rayons de convergence respectifs R_1 et R_2 .

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Analyse

On doit ici revenir aux résultats fondamentaux sur les séries entières ...

Résolution

Soit z un complexe tel que : $|z| < R_1$ et $|z| < R_2$.

Les deux séries $\sum a_{2n+1}z^{2n+1}$ et $\sum a_{2n}z^{2n}$ sont absolument convergentes et, donc, convergentes. Il en va alors de même pour la série somme $\sum a_n z^n$.

Supposons, pour fixer les idées, que nous ayons : $R_1 \leq R_2$ (c'est à dire $\inf(R_1, R_2) = R_1$).

Considérons alors un complexe z tel que : $|z| > R_1$. La suite $(a_{2n+1}z^{2n+1})$ n'est pas bornée.

Puisqu'il s'agit d'une suite extraite de la suite $(a_n z^n)$, celle-ci non plus n'est pas bornée.

On en déduit que la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Finalement, R est exactement égal au plus petit des rayons de convergence des deux séries $\sum a_{2n+1}z^{2n+1}$ et $\sum a_{2n}z^{2n}$:

$$R = \inf(R_1, R_2)$$

Résultat final

Les séries entières $\sum a_{2n+1}z^{2n+1}$ et $\sum a_{2n}z^{2n}$ admettant comme rayons de convergence respectifs R_1 et R_2 , la série entière $\sum a_n z^n$ admet comme rayon de convergence :

$$R = \inf(R_1, R_2)$$