Développer en série entière la fonction *f* définie par :

$$f(x) = (x-1)\ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

## Analyse

Le premier facteur ne pose pas de problème particulier. On doit concentrer notre attention sur le logarithme népérien. Il convient classiquement de faire apparaître une ou plusieurs formes classiques que l'on sait développer en série entière.

## Résolution

Il vient facilement :

$$x^2 - 5x + 6 = (2-x)(3-x) = 6\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)$$

Dans ces conditions, on peut dire :

- Que la fonction *f* est définie sur $]-\infty\,;2[\,\cup\,]3\,;+\infty[$.
- Que pour tout *x* dans $]-\infty\,;2[$, on a : $f(x) = (x-1)\left[\ln 6 + \ln\left(1-\frac{x}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{x}{3}\right)\right]$ et la fonction *f* est développable en série entière sur l'intervalle $]-2\,;2[$ (imposé par le terme $\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$).
- Que pour tout *x* dans $]3\,;+\infty[$, on a : $f(x) = (x-1)\left[\ln 6 + \ln\left(\frac{x}{2}-1\right) + \ln\left(\frac{x}{3}-1\right)\right]$ et la fonction *f* n'est pas développable en série entière.

On travaille donc sur l'intervalle $]-2\,;2[$.

On a classiquement :

$$\ln\left(1-\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad \ln\left(1-\frac{x}{3}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)\left[\ln 6 + \ln\left(1-\frac{x}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{x}{3}\right)\right] \\
&= (x-1)\ln 6 + (x-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n + (x-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n \\
&= -\ln 6 + x\ln 6 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{x^n}{2^n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{x^{n+1}}{2^n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{x^n}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{x^{n+1}}{3^n} \\
&= -\ln 6 + x\ln 6 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{x^n}{2^n} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}\frac{x^n}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{x^n}{3^n} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}\frac{x^n}{3^{n-1}} \\
&= -\ln 6 + x\ln 6 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{x^n}{2^n} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}\frac{x^n}{2^{n-1}} + \frac{x}{3} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{x^n}{3^n} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}\frac{x^n}{3^{n-1}} \\
&= -\ln 6 + \left(\ln 6 + \frac{5}{6}\right)x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{n}\frac{1}{3^n} - \frac{1}{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}\right)x^n \\
&= -\ln 6 + \left(\ln 6 + \frac{5}{6}\right)x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n-1}\right) + \frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n-1}\right)\right)x^n \\
&= -\ln 6 + \left(\ln 6 + \frac{5}{6}\right)x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\frac{-n-1}{n(n-1)} + \frac{1}{3^n}\frac{-2n-1}{n(n-1)}\right)x^n \\
&= -\ln 6 + \left(\ln 6 + \frac{5}{6}\right)x - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n+1}{2^n} + \frac{2n+1}{3^n}\right)x^n
\end{aligned}
$$

## Résultat final

La fonction $f$ définie sur $]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$ par :

$$f(x) = (x-1)\ln\left(x^2-5x+6\right)$$

est développable en série entière sur l'intervalle $]-2;2[$ et on a :

$$\forall x \in ]-2\,;2[,\ f(x) = -\ln 6 + \left(\ln 6 + \frac{5}{6}\right)x - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n+1}{2^n} + \frac{2n+1}{3^n}\right)x^n$$