

Développer en série entière la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x-2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Analyse

Le dénominateur admet une racine évidente qui permet une factorisation rapide puis une décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} .

Résolution

Il vient facilement :

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 - x + 1 &= (x-1)(x^2 - 1) \\ &= (x-1)^2(x+1)\end{aligned}$$

Dans ces conditions, la décomposition en éléments simples de la fonction f permet de poser :

$$f(x) = \frac{x-2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

On obtient les réels A , B et C par des méthodes classiques :

$$(x+1) \times f(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2} = (x+1) \times \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \right] + C$$

Pour $x = -1$, on obtient alors :

$$C = \frac{-1-2}{(-1-1)^2} = \frac{-3}{(-2)^2} = \boxed{\frac{-3}{4}}$$

En procédant de façon analogue :

$$\begin{aligned}(x-1)^2 \times f(x) &= \frac{x-2}{x+1} = (x-1)^2 \times \left[\frac{A}{x-1} + \frac{C}{x+1} \right] + B \\ &= (x-1) \times \left[A + C \frac{x-1}{x+1} \right] + B\end{aligned}$$

Pour $x=1$, on obtient alors :

$$B = \frac{1-2}{1+1} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

En tenant compte finalement de $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$, on a : $A + C = 0$.

D'où : $A = -C = \boxed{\frac{3}{4}}$.

Finalement :

$$f(x) = \frac{x-2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{3}{4} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{x+1}$$

Expression que nous récrivons classiquement :

$$f(x) = -\frac{3}{4}(1-x)^{-1} - \frac{1}{2}(1-x)^{-2} - \frac{3}{4}(1-(-x))^{-1}$$

Chacune des fonctions $x \mapsto (1-x)^{-1}$, $x \mapsto (1-x)^{-2}$ et $x \mapsto (1+x)^{-1}$ est développable en série entière sur l'intervalle $] -1; 1[$. Il en va donc de même pour f .

On considère alors les développements :

$$\begin{aligned} (1-x)^{-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ (1-x)^{-2} &= \left((1-x)^{-1} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n \\ (1+x)^{-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{3}{4}(1-x)^{-1} - \frac{1}{2}(1-x)^{-2} - \frac{3}{4}(1-(-x))^{-1} \\ &= -\frac{3}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n - \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{4}(-1)^n \right] x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+5+3(-1)^n}{4} x^n \end{aligned}$$

Remarque : en tenant compte de la parité de n , on peut réécrire le résultat obtenu comme suit :

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+5+3(-1)^n}{4} x^n \\ &= -\sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{4k+5+3}{4} x^{2k} + \frac{2(2k+1)+5-3}{4} x^{2k+1} \right] \\ &= -\sum_{k=0}^{+\infty} \left[(k+2)x^{2k} + (k+1)x^{2k+1} \right] \end{aligned}$$

Résultat final

La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

est développable en série entière sur l'intervalle $] -1; 1[$ et on a :

$$\forall x \in] -1; 1[, f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+5+3(-1)^n}{4} x^n = -\sum_{k=0}^{+\infty} \left[(k+2)x^{2k} + (k+1)x^{2k+1} \right]$$